

高等学校 数学科 学習指導案

指導者 森脇 政泰

日時	令和5年11月25日(土) 第3限 11:40～12:30
場所	数学教室
学年・組	高等学校I年1組 39人
単元	図形と計量
目標	1. 正接・正弦・余弦の値を求めることができる。正弦定理や余弦定理を用いて、三角形の辺の長さや角の大きさ、外接円の半径を求めることができる。三角比を用いて三角形の面積を求めることができる。(知識及び技能) 2. 三角比の相互関係を考え、正弦定理や余弦定理を導く過程を理解し、図形の計量に利用することができる。三角比と三角形の面積の関係を考察することができる。(思考力、判断力、表現力等) 3. 図形と計量に関する課題について、主体的に学習し、数学のよさを認識することができる。(学びに向かう力、人間性等)

指導計画(全37時間)

第一次 三角比 20時間(本時:課題学習 19/20)

第二次 三角形への応用 17時間

授業について

様々な事象の考察や問題解決に数学を活用しようとする態度を育成するために、数学のよさを認識できるような授業が一層求められている。「図形と計量」の単元では、現実と関わる内容として測量に関連する学習を行った。さらに本時の「図形と計量」の課題学習では、数学的な表現のよさや社会における有用性・実用性といった数学のよさが認識されることを目指して、機械やデザインと関わる内容の授業を計画した。題材は、2円の半径の比が2:1である特殊な内サイクロイドである。この場合は、大きい方の円の直径になる。利用されている例として、歯車を組み合わせることができる直線運動の機構(機械の一部)がある。

このような現実と関わる数学の学習の拡充を通して、実社会での問題発見・解決に生かしていくための教科等横断的な学習につなげたい。その一端として、本時の授業を提案する。

題 目 特殊な内サイクロイド

本時の目標

1. ある条件を満たす点がどのように動くか、三角比や座標などを用いて考察し解明する。
2. 三角比と座標で表すことのよさや、解決に用いた数学と得られた結果の有用性・実用性を認識する。

本時の評価規準(観点/方法)

1. 三角比や座標、円や扇形の性質を用いて考察し、どのように動くか解明できる。
(思考・判断・表現/観察, ワークシート)
2. 三角比と座標による簡潔な表現のよさや、解決に用いた数学と得られた結果が機械やデザインに関わることを認識する。
(主体的に学習に取り組む態度/観察, 生徒の感想)

本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
(導入 5 分) ○特殊な内サイクロイドの観察と課題の設定	○2円の半径の比が2:1である内サイクロイドを観察し、課題を見いだす。	・提示用の模型を観察する。
課題 半径1の固定された円Oの内側を、半径1/2の円Cが内接しながら、すべることなく回転していく。円C上の点Pが、最初円O上の1点Aにあるとき、点Pはどのように動くか調べよう。		
(展開 40 分) ○解決方法の検討 ・2円の位置関係 ・座標と三角比の利用 ○課題の解決 ・θによる場合分け ①$\theta=0^\circ$の場合 ②θが鋭角の場合 ③$\theta=90^\circ$の場合 ④θが鈍角の場合 ⑤$\theta=180^\circ$の場合 ・結論の確認 (まとめ 5 分)	○各点を座標で表す。 ・半径の大きさから円Cが常に点Oを通ることを確認し、円Cと円Oの接点をBとする(図1)。 ・点Oを原点、点Aを(1,0)、直線OAをx軸とする座標平面を考え、$\angle AOB=\theta$としてB、Cの座標を求める。 ・$\theta \neq 90^\circ$では円Cが直線OA(x軸)とO以外の交点Qをもつことを確認し、円C内の直角三角形BOQから、Qの座標を求める。 ○以下のように、Pの座標を求めて解決を図る。 ①PがAにあることから求める。 ②弧AB=弧PBと二等辺三角形BCPとBCQの合同から、PとQの一致を示して求める。 ③B(0,1)や$\angle PCB=180^\circ$、および半径の大きさから、PとOの一致を示して求める。 ④鋭角の方法を参考にして、PとQの一致を示して求める。 ⑤$90^\circ$の場合と同様に求める。 ・$P(\cos\theta, 0)$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) から、Pが円Oの直径の上を右端から左端に動くことを確認し、グラフソフトと模型で観察する。 ○解決の過程と結論を振り返る。 ○結論に関連する現実の話題を全体で共有し、ワークシートに感想を記入する。	・動かないO、Aが、位置を表す基準となることに気付かせる。 ・模型で$\theta=90^\circ$のときの円Cの位置を確認する。 ・②は図2で考察する。 ・模型で弧AB=弧PBを確認する。 ・③以降は、①と②を参考にして自己解決を促す。 ・④は図3で考察し、弧PBが優弧であることや、$360^\circ-2\theta$の角を考えることを確認する。 ・内トロコイドをかいて見せ、内サイクロイドに言及する。

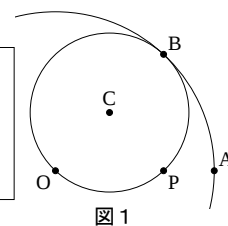


図1

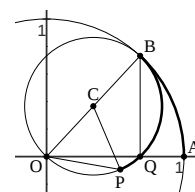


図2

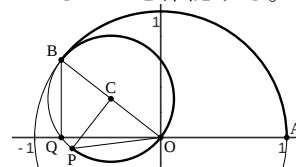
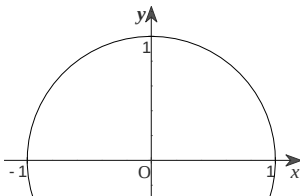
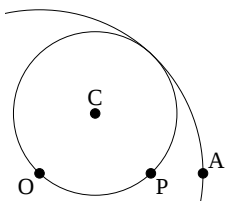


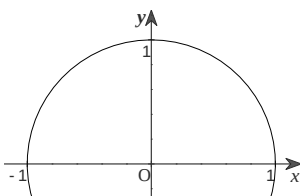
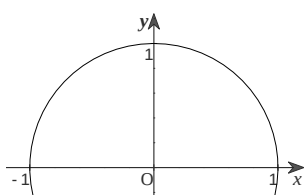
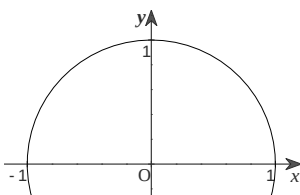
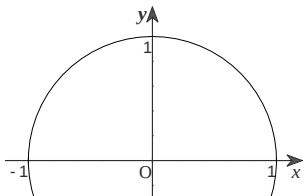
図3

備考 準備物:ワークシート, 提示用の模型とPC(使用ソフト GRAPES), 内トロコイドをえがく道具

課題 半径 1 の固定された円 O の内側を、半径 $\frac{1}{2}$ の円 C が内接しながら、すべることなく回転していく。円 C 上の点 P が、最初円 O 上の 1 点 A にあるとき、点 P はどのように動くか調べよう。



予想



授業の振り返り

1. 課題を解決することができましたか。 ☐ (←◎、○、△で記入)
2. 授業の感想、考えてみたくなったこと、疑問に思ったことなどを書きましょう。(自由記述)

【資料】(課題の解答例について)

ここでは、図0の $\angle ZXY = \angle x$ 、 $\angle YXZ = \angle y$ のように、 $\angle ZXY$ と表したときは角の向きも考える。

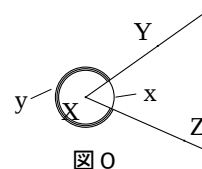


図0

円Oと円Cの半径の比が2:1であるから、円Cは常に点Oを通る。

点Oを原点、直線OAをx軸とする座標平面を考える。このとき、 $A(1, 0)$

内接する2つの円の接点をBとし、 $\angle AOB = \theta$ とすると、 $B(\cos\theta, \sin\theta)$ 、 $C(\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2})$

ここからは $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で考える。始点は点Aであるから、点Pは点Cを中心として時計の針の回転と同じ向きに回転する。

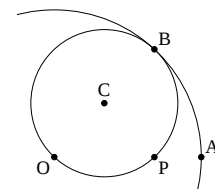


図1

(i) $\theta = 0^\circ$ の場合

PはAと一致するから、 $P(1, 0)$ すなわち $P(\cos 0^\circ, 0)$

(ii) $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ の場合

すべらずに回転するから、(弧ABの長さ)=(弧PBの長さ) (θ が鈍角のとき弧PBは優弧)であり、

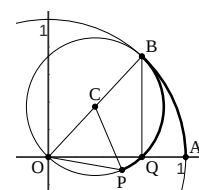


図2

$$\frac{\theta}{360} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \pi = \frac{\angle PCB}{360} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$\angle PCB = 2\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

また、半径の比から、 $\theta \neq 90^\circ$ では円Cが直線OA(x軸)とO以外の交点Qを持つ。

線分OBは円Cの直径であるから $\triangle BOQ$ は直角三角形で、 $Q(\cos\theta, 0)$

(ii-1) θ が鋭角のとき

円周角の定理から $\angle QCB = 2\theta$ であり、 $CP = CQ = CB$ と $\textcircled{1}$ から、 $\triangle PCB = \triangle QCB$

辺CBが共通で点Pが直線OBの下側($\angle PCB = 2\theta < 180^\circ$)にあるから、PとQは一致する。

よって、 $P(\cos\theta, 0)$

(ii-2) $\theta = 90^\circ$ のとき

$\textcircled{1}$ から $\angle PCB = 180^\circ$ であり、半径の比から、PはOと一致する。

よって、 $P(0, 0)$ すなわち $P(\cos 90^\circ, 0)$

(ii-3) θ が鈍角のとき

$\textcircled{1}$ から、 $\angle BCP = 360^\circ - 2\theta$

一方、 $\angle BOQ = 180^\circ - \theta$ で、円周角の定理から $\angle BCQ = 360^\circ - 2\theta$

$CP = CQ = CB$ と合わせて $\triangle PCB = \triangle QCB$

辺CBが共通で点Pが直線OBの下側($\angle PCB = 2\theta$ は 180° より大きく 360° より小さい)にあるから、PとQは一致する。

よって、 $P(\cos\theta, 0)$

(ii-4) $\theta = 180^\circ$ のとき

$\textcircled{1}$ から $\angle PCB = 360^\circ$ となり、Pは点 $(-1, 0)$ にあるから、 $P(-1, 0)$ すなわち $P(\cos 180^\circ, 0)$

以上により、 $P(\cos\theta, 0)$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)となるから、Pは円Oの直径の上を右端から左端にかけて動く。

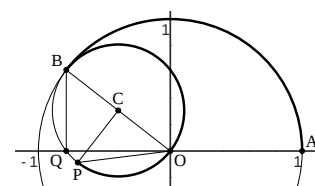


図3

(円Cが直線OAの下側を回転する場合は、点Oを中心に全体を 180° 回転させると、今回の方法で判断できると考えます。)

実践上の留意点

本時の課題学習は1時間で計画しましたが、実際は1.5時間ほどかかりました。「探究的な学び」につながるよう**本時の学習指導過程**を改善すると、少なくとも2時間は必要になります。

三角比の拡張が既習であったことと時間が不足したことから、 θ の場合分け①～⑤は授業者が提案しました。この場面を生徒主体の学習にするため、学習指導案の**本時の学習指導過程**には次のような改善が考えられます。

- ・ $\theta=30^\circ$ などの具体的な角度(必要に応じて 120° など追加して)に取り組んでから、一般の θ で考察する。
- ・ θ が鋭角の場合を解決した後、鈍角でも同様にできるか考え、必要な場合分けを検討する。

どちらも試行錯誤がしっかりできるよう、十分な時間が必要になります。

本時の学習指導過程は数学の問題解決をしてから、まとめの段階で現実の話題を共有する計画です。これを変更し、導入の段階で実用例を提示し、現実の事象から数学の問題解決に向かうという学習過程にすることも考えられます。

本時の評価規準の2は記入された感想から判断する計画ですが、添付資料のワークシートは自由記述のため様々な内容になることも考えられます。この評価規準に沿った質問項目を追加したほうがよいと考えます。

以下は、**本時の学習指導過程**の補足や、授業の実際の一部です。

使用した模型は図4～6(発泡スチロール製で裏面に磁石をつけたもの)です。導入の観察では図4のように授業者が演示しました。



図4

解決方法の検討場で、点の位置を明確に表す方法を尋ねると、「座標」との発言がありました。座標がわかると、原点を点Oに、x軸を直線OAにすることは自然な考えのようです。座標平面上の円Oで、長さ1の半径OBがどのように動くか確認した後、点Bの座標を問うと、 $\angle AOB$ の三角比で表すことが発表されました。

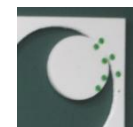


図5

弧ABと弧PBについて、すべることなく回転することを確認し、接した順にシールを貼った模型(図5)を観察した後、合同ではないが成り立つことを尋ねると、弧AB=弧PBが発表されました。

2つの二等辺三角形の合同からPとQの一致を示しましたが、「PとQが円C上の点で、Pが直線OBの下側にあり、 $\angle PCB = \angle QCB$ であること」からも示せます。気づいた生徒がいました。

公開授業では「① $\theta=0^\circ$ 、② θ が鋭角」を解決した後、まとめ(部分解決の振り返り、現実の話題の共有、感想の記入)に入りました。次の授業では、前時の解決を参考にして、残りに取り組みました。 θ が鈍角の場合の弧PB(図6)が明確になると、全体の解決に至りました。

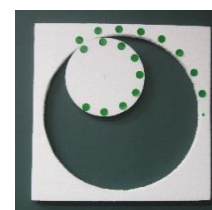


図6

本時で使用した内トロコイドをえがく道具は市販のもので、高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説数学編理数編のp.124に掲載されている道具と似たものです。

公開授業のワークシートは、場合分け①～⑤に応じて図を不均等に配置しました。生徒の自由な思考の妨げにならないよう、資料のワークシートの図は余白が均等になるよう配置しています。