テーマ２：数学教育

授業研究を推進する過程で見出された困難点

藤井 斉亮
東京学芸大学

要旨

TIMSSビデオスタディの結果を集約したThe Teaching Gap が1999年に出版されて以来、日本の授業研究が世界の注目を集め、各国で実践されている。しかし、授業研究には多くの暗黙の前提や機能がありそれが必ずしも十分に理解されていない実態がある。わが国から諸外国へ情報発信する際には、わが国の授業研究の特質を比較文化的視点を踏まえて捉え、表現等を適切にする必要がある。授業研究はわが国の学校文化の中では日常化されていて、その価値や特徴が自覚されにくいからである。本シンポジウムでは各国ですでに授業研究が試行・実践されている実態を踏まえ、授業研究を推進する過程で顕在化してきた障壁や誤解について、筆者のウガンダとマラウイでの経験を踏まえ考察する。このことを通して、無意識に価値あることを放棄してしまうことを回避する一布石としたい。本シンポジウムでは、授業を推進する際の障壁として、文化的背景をもつもの、学校教育の有様から生じるもの、授業観自体から生じるものを考察した。また、授業研究を推進する過程で見出された種々の誤解を特定し考察することを通して、わが国の授業研究の価値とその特質を再確認した。

キーワード：授業研究、研究授業、問題解決型学習、学習指導案、予想される子どもの反応

1．はじめに

TIMSS ビデオスタディの結果が注目を集め、教えるという活動自体が教育研究者の関心の的となっている。そして、The Teaching Gap が 1999 年に出版され、その第 7 章において日本の授業研究が紹介されて以来、教師の資質向上の視点から日本の授業研究への関心が高まっている。実際、米国を筆頭にAPEC諸国やアフリカ諸国においても日本型授業研究が試行され、授業研究あるいは研究授業で展開される問題解決型授業に関する書籍や研究論文も多数出てきている。

しかしながら、外国からみると、日本の授業研究を実施するためには、それを可能にしている前提があり、それが見えないのである。その結果、最近になって成功例だけでなく、実践する上での困難点が報告されるようになってきた。授業は文化的営みである。授業研究を他の文化の中で実践しようとすると、種々の障壁に直面するだろうし、それは当然のことであろう。では、どのような障壁が特定されてきたのか。それを考察することは、わが国の授業研究の特質を再確認することになるし、世界に授業研究を発信する際の参考にもなろう。

本稿では、まず、授業研究を推進する際の困難点を C. Lewis (2000)と Groves ら(2010)の指摘を踏まえて概観する。そして、2009 年より東京学芸大学数学科教育研究室が JICA と連携してアフリカ諸国を対象に実施してきた授業評価セミナーに焦点を当て、特にウガ

ンダとマラウイを対象に 2011 年 9 月 24 日から 10 月 7 日まで実施した研修員に対するフォローアップ（註）の成果を踏まえて授業研究を推進する際に顕在化した困難点や誤解を考察する。

２．授業研究を推進する際の困難点

The Teaching Gap（1999、p.150）において米国で授業研究を実践することができるかその可能性が考察されている。この本の出版から 1 年後、研究授業に焦点を当てて、C. Lewis (2000)は研究授業を可能ならしめている日本における背景を考察し、北米において授業研究の展開は可能かを論じている。そこでは、７点が列挙されている。

①共有された、簡潔明瞭で無駄のない（frugal）カリキュラム
②確立された協同体勢
③授業はみなで努力すればかならず良くなるという信念
④常に反省する姿勢(Self-critical Reflection)
⑤安定した教育政策
⑥指導改善のために使える時間の確保
⑦焦点は全ての子ども

これら 7 点は、授業研究を他の文化圏に持ち込む際に必要要件として考慮すべきこととなる。逆に、必要要件を満たさなければ立ちはだかる壁となるわけである。S. Groves & Doig B. (2010) は、C. Lewis の論文から 10 年後に、自国オーストラリアでの授業研究の推進経験や中国、米国、英国、チェコスロバキアの観察等を踏まえて、授業研究を推進する際の障害要因を３つの範疇、すなわち、文化的背景、学校教育の有様、授業観の相違から示している。C. Lewis の②③④は文化的背景と関連し、①⑤⑥は学校教育の有様、そして③⑦は授業観に関連していよう。

（１）文化的背景からくる障壁

彼らは次の４点を指摘している。第一に、一言でいえば伝統であり、より具体的には教育政策が比較的安定している（他国に比べれば）という状況や教員研修の有様やそれに対する社会的承認などに起因する障壁である。第二に、授業自体の捉え方として、授業が公の活動か、全く個人的な活動かという違いがあることを指摘している。すなわち、授業が個人的活動であると捉える文化・国、例えば、オーストラリアでは他の人の授業を参観することに対して著しい躊躇が見出せるという（この 10 年間で実態は急速に変化してきているそうだが）。第三に、よく指摘されていることだが、教師の社会的地位の相違を指摘している。第四に、学習が集団内で生起すると捉えるか個人主体と捉えるかの相違を指摘している。具体的には学習が共同的であると捉えている日本と、個人の活動とされるオーストラリアでは授業における規範や教室文化が異なると指摘している。

ここで伝統について述べてみよう。多くの外国人が授業研究のルーツに関心があると思われるからである。蒔苗直道（2010）によれば、日本の授業研究は、実は 1880 年代に米国人によって書かれた複数の書籍の影響を受けているという。その中の一つに Edward Sheldon(1862)の本があり、この中に新しい指導法を学ぶ方法として批判授業（criticism lesson）と示範授業(model lesson)が記述されており、ここにわが国における授業研究の源

をみることができるという。蒔苗直道（2010）によると 1900 年代の初めには各地区で批判授業会が行われており、「授業批評会」あるいは「授業研究会」と呼ばれていたという。筆者も東京の文京区立誠之小学校の資料保存室で学校日誌を見つけ、その中に最初の授業批評会が明治 19 年（1886）年 5 月 21 日に行われたことを確認している。この学校日誌には、当時の様子が描かれており「明治二十年前後は批評会は東京府内でいくつも組織されたらしく、その当時の各批評会の規約などもかなり現存している」（現代仮名使い、漢字に変換している）と記されている。開催の方法についても「毎月数回批評会を開き授業の改良を図るべし。但しその順序方法は校長の定める処に拠る」と記されている。学校日誌から、授業研究の特徴、すなわち各学校が計画実施し、教師集団主導であり、目的は授業の改善であったことが伺える。

筆者が見出した学校日誌は小学校のものである。中等学校における授業研究に関する資料は見いだせなかった。この事実は、Fernandez & Yoshida(2004)が指摘しているように、わが国において授業研究は高等学校ではほとんど行われていないという実態と整合的であろう。この実態は、Susie & Doig(2010)が指摘している授業観に関連しているかもしれない。すなわちわが国の場合、小学校では授業が公的性格を擁すが、高等学校では個人的なものという側面が強いのではないか。

Susie & Doig(2010)はまた学級に視点を置くと、わが国の学級は学習者のコミュニティという性格を有しているが、オーストラリアの場合は学習者個人がそれぞれ独立しており、その集合体となっているという。学級が学習集団として機能しているという実態は、わが国における学校文化・学級文化やそこでの規範として特徴付けられる側面だが、これらが諸外国で授業研究を実践する際の障壁となりうると思われる。学習者のコミュニティとしての学級は、問題解決型授業の基盤を構成しており、これが諸外国で研究授業を問題解決型授業として実践する際の最大の障壁となっているかもしれないのである。

（2）学校教育の有様を背景とした障壁

Susie & Doig(2010)は、まず小学校教師のもつ授業担当科目数の相違が指摘している。すなわち、日本のように教師（小学校）が担当する科目の数が複数である国と中国のような教科専門の形態である国では、そこでの教師の意識、授業の有様、そして授業研究への取り組みも異なることになる。第二に、教師の勤務形態、あるいは研修形態の相違が指摘されている。例えば、学校を離れて研究授業へ参加しようとする際にオーストラリアではまず代替教員の確保が必要であるという。したがってオーストラリアでは、研究授業への参観は躊躇せざるをえないという現実があるという。また、研究授業の指導案の検討に対しても、自分の時間をそこに費やすことに抵抗を示す教師が多いと言う。それが許される勤務形態あるいは習慣がないのである。第三に、教育課程の質的量的相違が指摘されている。

以上の指摘の中で、第三点目については、確かに、国が教育課程の基準を学習指導要領として示している日本の場合、教師間で教育課程について共通認識があり、授業研究が展開しやすいといえる。実際、わが国では新しい内容が教育課程に組み込まれた際などに授業研究が活発化する傾向があろう。米国やオーストラリアでは全国統一カリキュラムを構想しているが、「意図したカリキュラム」の充実が、「実行されたカリキュラム」に直接

影響を与えることが認知されてきたのではないだろうか。

（３）授業観の相違に起因する障壁

日本の算数授業においては問題解決型授業が行われるが、この問題解決型授業自体が他国からみると特殊であろう(J. Becker ら,1990)。授業研究の受け入れは、他国においてはこれまで経験したことのない授業の型を、受け入れるかどうかは別にして、少なくとも知ることを意味している。

日本において問題解決型授業が可能である背景として、S. Groves &Doig B.(2010)は日本の教育課程、より具体的には教科書の有様が他国と異なることを指摘している。教育課程の系列と範囲が明確であるため、教科書も系統性が明確であり、問題解決型授業における問題が特定されやすいのである。実際、Groves らは、オーストラリアでは研究授業のテーマや題材の選択が日本に比べて容易でないと述べている。この点は C. Lewis(2000)も指摘（①）している。さらに、日本では一つの授業には問題が一題しか出題されないが、この点も他国の算数数学の授業の実態とは著しく異なるものであろう（T.Fujii,2010)。

Groves ら(2010)は、さらに研究授業における指導助言者の存在とその役割が日本と他国では実態として異なると指摘している。研究授業は授業研究の核であり、研究授業においては、授業後の協議会における指導助言者の質が研究授業会自体の成否を分けるといっても過言ではない。特に、そこでは数学的視点からだけではなく、数学教育学的視点からの考察の質が問題となる。Groves らは、指導助言者を欠いた研究授業を散見した経験を引き合いに出し、オーストラリアや他国においては適切な指導助言者の欠如が、授業研究推進の障壁となっていると指摘している。

問題解決型授業の受容に対する困難性を踏まえると、わが国において、なぜ問題解決型授業が重視されているのか、その授業観、教育観を顕在化させる必要があろう。

以上、C. Lewis (2000)と S. Groves & Doig B. (2010)を参照し、授業研究を推進する際に直面する障壁を概観し考察してきた。特定された障壁の中には乗り越えられるもの、回避できるもの、また、そうではないものがあろう。いずれにしても各国においてはその国の実態やニーズに応じて授業研究は推進されていくものと思われる。次節ではアフリカのウガンダとマラウイの場合を考察する。

３．授業研究を推進する過程で顕在化した誤解：ウガンダとマラウイの実態を踏まえて

我われは今まで、授業研究をＡとしたとき、nonＡを明確に意識してこなかった。今回のアフリカ訪問で、先ず、授業研究をワークショップと区別する必要性を感じた。nonＡとしてワークショップが顕在化したのである。

授業研究はワークショップとは本質的に異なると考えているが、一方で、授業研究が教師にとって研修の場となりうる側面をもっているので、単純に峻別できるものではない。教育実習における授業研究は研修の面が強いし、現職教員対象の授業研究であっても、全国レベルのものとなると参加者の意識は研修の側面が強くなろう。実際、高橋昭彦（2006）はアンケート調査によって、授業研究を「校内研究」「地域レベル」「全国レベル」に類型化し、そこでの参加者の期待等の違いを明らかにしている。本稿では、特に校内研究における授業研究を念頭において議論したい。

（１）授業研究はワークショップか

C. Lewis(2002)は The Teaching Gap 出版から３年後にすでに授業研究とワークショップの違いを明確に指摘している（この事実は高橋昭彦先生に教えていただいた）。次の 5 側面での比較である。

伝統的ワークショップ	授業研究
・答えから始まる	・問いから始まる
・外部の専門家が推進	・参加者自身で推進
・コミュニケーション： 指導者から教師へ	・コミュニケーション： 教師同士間
・階層的関係 （指導者と学ぶ側に格差）	・互いに学び合う関係 （教師間の関係は互恵的）
・知識/情報は研究から実践へ	・実践自体が研究

米国では教員研修の一環としてワークショップが活発に行われているので、当然とも言えるが、伝統的ワークショップは「答え」から始まり、授業研究は「問い」から始まる、という C. Lewis(2002)の洞察は傾聴に値する。

マラウイでは問題解決型授業に関心が集まっており､講演会･示範授業が行われていた。これはワークショップである。ウガンダでは、「サイエンスクリニック」（以下クリニック）と称して、授業を参観した後、その授業について討議することが行われていた。組織運営も充実していて一定の成果を上げていた。だからこそ、この「クリニック」が授業研究であるのか議論になった。実際、「クリニック」は一見すると授業研究のように見えた。だが、授業を計画する際に、なぜその授業なのかが明確ではない。すなわち、児童生徒の実態から特に理解が不十分な教材が特定され、その授業実践であるのか、あるいは、指導が困難な教材が見出され、その授業実践であるか、または新しい指導内容・方法の提案なのか等が明確ではない。授業者が自由に授業内容を決め、いわば、授業者が得意な内容、授業しやすい内容が選ばれている面が否めない。授業後の討議会でも、なぜそこが研究授業の内容として選択されたのかは議論されない。授業での表面的で一般的な問題点が指摘されるという特徴を持っていた。

C. Lewis(2002)の指摘に従えば、ウガンダの場合、「問い」から始まっていない。では「問い」とは具体的には何か。授業研究では、「問い」は最終的には授業の目標として顕在化し、学習指導案に明記される。このように見ると、「問い」の不在は、学習指導案の不在となる。実際、ウガンダ・マラウイでは学習指導案が授業研究の必須要素であるという認識はなかった。わが国の授業研究では学習指導案なしで授業を観ることはふつうしない。授業の評価は授業の目的に依存するからである。もちろん、学習指導案は、授業の目標を知るためだけに参観者に読まれるのではない。学習指導案には、「問い」の価値が論じられ、学校教育目標や子どもの実態との関係でその「問い」が授業実践として具現化される必要性が論じられ、また、適切と思われる方法が提案される。だから研究授業は学習指導要案と照らし合わせて行われ、学習指導案なしでは不可能である。

学習指導案に対する他の誤解は、英語ではLesson Planであるため、必ず実行されるべきと捉えられている点である。わが国では、学習指導案通りにいかない授業があっても、必ず負の評価がでるわけではない。

ウガンダとマラウイでは、児童生徒の実態として想定していなかった側面が授業中に顕在化し、指導が行き詰まったときでも、実態を無視して学習指導案通りに授業を展開しようとしていた。Planなので実行しなければならないと思い込んだのであろう。

では、授業研究において学習指導案とは何か。高橋昭彦（2006）は一般的な教育研究における研究計画書（Research Proposal）であるとし、次の表を示している。このように捉えると、学習指導案と授業中における児童生徒の実態がずれた際に、その対応の基本姿勢が異なってくると思われる。

一般的な教育研究		授業研究
研究計画	←→	学習指導案
資料収集	←→	研究授業参観
資料の解釈と考察	←→	研究協議会

学習指導案は授業研究を推進する上での必要要素の一つである。ここでその役割・機能をあらためて考えてみると、まず、学習指導案は、授業研究においてその作成自体が教師間での共通目標として機能することが挙げられる。さらに、教材研究を集約する機能を見出すことができる。学習指導案を共同で作成していく過程は、教材研究の過程であり、教材研究の成果は学習指導案として結実するのである。

さらに、学習指導案は、それを事前に検討することで、授業を観る視点を教師ではなく授業自体に向ける役割をもつと言える。このことを次節で述べよう。

（２）考察対象はTeachingかTeacherか

授業後の研究協議会を観察していて気がついたことだが、そこでの考察の対象がTeachingではなくTeacherとなっていた。すなわち、ウガンダの「クリニック」では診断・治療の対象は教師(Teacher)である。授業・指導(Teaching)ではない。したがって、当然の帰結ともいえるが、ある授業では、研究協議会においてTeacherへの個人攻撃とも思える発言が多くなされた。しかもそこではこれに授業者が猛反論するという事態が見出された。すなわち、授業者が参観者からの批判に対して防戦し、授業者対参観者の構図で議論がなされ、生産的とは言い難い結果となった。

この具体的事実から分かるように、「クリニック」の意図は授業観察を通した教師(授業者)改善にある。授業観察においてチェックリストが用いられていることからも、そこでの分析と評価の対象が教師（Teacher）であることが伺える。わが国でも管理職が人事考課を行うときはチェックリストを用いよう。だが、授業研究にチェックリストを持ち込むのは不適切である。アフリカ諸国ではチェックリストが常用されているが、目的に応じて活用するよう実態を改善する必要があろう。

授業研究は、Teachingに焦点があたり、教育学的視座を基本に据えて、授業を客観的・科学的に考察・吟味しようとする。だからこそ、授業の目標、具体的には学習指導案が重

視され、指導案に記された意図や教材が授業でどのように具現化されたのか、そこでの教育的価値は何かが議論の対象となる。

非生産的であった授業後の協議会を反省し、ウガンダとマラウイでは、事前に学習指導案を吟味し、そこでの議論を念頭において授業を観察することを試みた。その結果、授業後の研究協議会では議論の焦点が一変した。学習指導案は、授業を観る視点を Teacher から Teaching に変える契機を与えたのである。

（３）授業研究は一過性か

ウガンダとマラウイ両国ともに授業研究の継続性は実現されていない。理想の Teaching は容易には実現できない。Teaching の質的向上を目指す授業研究は目的志向性があり、継続的・持続的である。

授業研究は「クリニック」と違い、健康であっても実施される。教師は「授業で勝負する」という信念を持ち、教材研究をして授業の質を高めようとする。授業研究がワークショップと本質的に異なる点は、目標・目的の設定者が当事者である点である。この点は C. Lewis(2002)も明確に指摘している。ワークショップの場合は、企画者と参加者はふつう異なり、参加者の側からいえば、自身の興味やニーズに応じてワークショップを選択し、参加することになる。換言すれば、興味・ニーズにそぐわなければ参加することはない。従って、継続性は期待できない。一方、授業研究の場合、例えば、学校単位で実施される授業研究では、その学校の児童生徒の実態をまず踏まえ、さらに教育改革の動向、社会のニーズ等を踏まえて授業研究の目標が特定される。それは当然のことながら学校目標の具現化となっている。すなわち、授業研究は日々の教育活動と連動しており、継続性が内在している。しかも、より良い教育を目指すことから、自己向上機能を備えていることが期待できる。すなわち、「継続性」「自己向上機能」は授業研究をワークショップから区別し、特徴付ける要素であろう。

高橋昭彦(Takahashi, A. (2011))は、知識（knowledge）を高めるのがフェーズ 1 の研修で、その知識を授業で活用する技量（expertise）を高めるのがフェーズ 2 の研修であるとしている。フェーズ 1 は算数数学を指導する上での知識を習得する研修である。教員養成大学の教科教育法の授業もこれに該当しよう。現職教員の場合、講習会への参加という形態となろう。そこでは、数学の学問としての知識、数学を陶冶材として捉えたときの知識、教育課程に関する知識、授業計画・教育課程に関わる知識などが含まれる。フェーズ 1 では講義を聞いたり、文献を購読したり、模範授業のビデオを観たりする。一方、フェーズ 2 では、その知識を実際の授業で活用する技量形成に焦点が当たる。そこでは、ある具体的な授業が考察の対象となり、児童生徒に対する発問や板書、机間巡視の方法、授業の評価の方法などが含まれる。また、実際に指導案を立てて、授業を実践し、その評価を行うことによってフェーズ 2 は展開される。わが国ではこのフェーズ 2 を授業研究として理想的に具現化しているといえる。

授業研究は、教師である限り、授業をしている限り継続的に展開される活動である。授業研究に対するこの基本姿勢こそ、他国の教師にとって最も理解しにくい側面であるかもしれない。換言すれば、長期に渡る研究心、自己向上心こそ授業研究の背後にある原動力である。

実際、わが国の場合、たとえフェーズ１型の研修でも、一過性のワークショップで終わらず、自主的に教師が集まり、研鑽を長期に渡って積み上げている事例が見出せる。例えば、月刊教育雑誌『新しい算数研究』では「授業研究 NOW」というコーナーで毎月各地の授業研究会が紹介されているが、フェーズ１型の研究会でも、長期性と自己向上志向が見出せる。また、研究会には指導者がおり、その指導者が重要な役割を担っている様子を伺い知ることができる。ベテランと若手の交流も行われている。例えば、「三島算数教育セミナー」(毎月第一土曜日に開催)を紹介した松本陽子先生は、参加者の動機として、「算数指導の腕を上げたい」「算数の学習でも子ども達の目を輝かせたい」などを挙げている。そしてご自身では最後に「我々は、やっぱり算数が好きなのだ！」と結んでいる。(松本陽子,2011)このような発言の背後にある教師の信念がどのように形成されたのか興味深い。比較文化的視点から、個人の資質ではない文化的・社会的要素と信念の形成過程を特定してみたいものである。

（４）問題を解決すれば問題解決型の授業か

ウガンダとマラウイ両国において、「児童生徒中心」ということに対しては肯定的であったが、問題解決型の授業は行われていなかった。しかし、当事者達は問題解決型授業であると思い込んでおり、問題解決型授業とは何かの認識に日本側と大きな食い違いが見出された。

杉山吉茂先生は教師のレベルを３つに分けているが、児童中心であり問題解決型授業ができる教師はレベル３の教師である。では、レベル３は「こどもが見つける」授業だから先生は何もしないのか。例えば、「今日は分数の割り算の仕方を考えましょう。先生に聞くのではなく、あなたがた自分達でかんがえなさい」という授業である。杉山先生は、そうではない、という。普通に授業しているだけでは、こどもが算数を創ったりできない。そういうことができるためには、そういうことが出来るような子どもに育てておかないといけない。そういうことができる子どもを育てることができる先生がレベル 3 の先生で、専門家といえる。そういう子どもを育てて初めて児童中心の教育となり、レベル３となる、と杉山先生は言う。さらに、分数の割り算ができればいいのではなく、それを通して、人間教育ができる先生が専門家だという。

このように考えると、問題解決型授業では、何をどのように教えておけば、何が自力解決できるかの教材研究が必要となる。研究授業は、これまで教師が何をどのように教えてきたかの評価の場であり、同時に教師が行ってきた教材研究が評価される場、その深さと広がりが評価される場とも言えるのである。この認識は特にマラウイで観た授業では見出せなかった。

実際、授業で出された問題を児童生徒が自力解決できるという見通しを教師が持っていなかった。すなわち、児童生徒の既習事項が何であるか、その理解の実態がどうかを授業者が把握していなかったのである。

何をどう教えるか、何を教えないかは学習指導の根幹にかかわる問題である。学習指導に対する一番の誤解は、数学の内容を分かりやすく丁寧に説明することに価値があるという誤解である。この誤解は、教育関係者以外の人にはよくあることである。ウガンダとマラウイでも見出せた。分かりやすくする工夫・努力は大切だが、問題は全ての内容を教師

が教えなければならないと思っていることである。すなわち、「教えなければならないこと」と「教えなくとも児童生徒に任せるところ」を区別する重要性を全く認識していないのである。

「少なく教え、多くを学ぶ」と言われるように、教えなくともできることが多い方が教育としては望ましい。では、どうしたらそのようにすることができるのか。ふつう、原理・原則を教えようと言うが、具体的にそれを特定するのは難しい。教材研究が必要となる。このように考えると、問題解決型の授業を志向し実現するには、まず教材研究の重要性を認識していなければならず、学習指導に関する基本的な考え方から議論しなければならないことがわかる。ウガンダとマラウイで顕在化した問題解決型授業に対する誤解の背後には、学習指導に対する基本的な考え方の相違、教材研究に対する認識不足が見出せたのである。

（５）研究授業は必ず２回行わねばならないか

ウガンダでは研究授業を 2 回行うことを基本としていた。指導案が完成(？)すると、研究授業を行い、問題点を修正して再度研究授業をする、というパターンである。この傾向は他国においても見出せる。この誤解のルーツは The Teaching Gap の中にある「授業研究過程の段階」で「第 3 次授業の演じ（事前授業研究）」「第６次改訂版学習指導案による授業の演じ」と記述されたことにあるとも言えるが、この誤解は深刻である。まず、授業自体に対する誤解である。授業は複雑な要素の総体で、しかも有機的総体である。ある部品を替えれば故障が治るというものではない。また、指導がどの児童生徒に対しても同じようにできるという誤った思い込みがある。さらに、根底には児童生徒に対する人間としての尊厳軽視があると思われるからである。

４．おわりに

授業研究は、わが国の学校文化の中では日常化されていて、いわば空気のごときものである。したがって、その特徴や価値・付加価値が自覚されにくい。わが国から情報発信する際には、わが国の授業研究の特質を捉え、比較文化的視点を踏まえて、表現等を適切にする必要があろう。良いことをしていても、それが無自覚であると、その良いことをあっさり捨ててしまうことが危惧されるが、授業研究の価値の再確認は、それを阻止する一布石になると考える。

註

東京学芸大学数学科教育学研究室では、2009 年より JICA と連携してアフリカ諸国(英語文化圏の一部：ケニア・ガーナ・マラウイ・タンザニア・ナイジェリア・ウガンダ・ザンビア・エチオピア・シエラレオネ)を対象に授業評価セミナーを実施してきた。

主要引用文献

Becker, J. P., Silver, E. A., Kantowski, M. G., Travers, K. J., & Wilson, J. W. (1990). Some observations of mathematics teaching in Japanese elementary and junior high schools. *Arithmetic Teacher,* 38(2), 12–21.

Fujii,T(2009). A　JAPANESE PERSPECTIVE ON　COMMUNITIES OF INQUIRY: THE MEANING OF　LEARNING IN WOLE-CLASS LESSONS, *The Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.1, Thessaloniki, Greece. pp.165-170.

Groves,G, B. Doig (2010) Adapting and Implementing Japanese Lesson Study: Some Affordances and Constraints. *Proceedings of the EARCOME5, Tokyo, Japan.* pp.699-706.

Lewis, C (2000)Lesson Study: The Core of Japanese Professional Development. Invited Address to the Special Interest Group on Research in Mathematics Education. American Educational Research Association Meetings, New Orleans.

Lewis, C. (2002) *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional improvement.* Philadelphia: Research for Better Schools.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* The Free Press.

Takahashi, A. (2011). The Japanese approach to developing expertise in using the textbook to teach mathematics rather than teaching the textbook. In Li, Y. & Kaiser, G. (Eds), Expertise in Mathematics Instruction: An international perspective, New York: Springer.

杉山吉茂(2008)*初等科数学科教育学序説*, 東洋館出版社.

高橋昭彦（2006）「算数科授業研究の類型とそれぞれの特性に関する考察」*日本数学教育学会誌* 88(8), pp. 2-14.

高橋昭彦（2011）「算数数学科における学習指導の質を高める授業研究の特性とメカニズムに関する研究－アメリカにおける 10 年間の試行錯誤から学ぶこと－」*日本数学教育学会誌* 93(12), pp. 2-9.

松木陽子(2011)「算数教育セミナー(三島地区)」*新しい算数研究* No.489, pp.24-25.

Implementing Japanese Lesson Study in Foreign Countries: Misconceptions and Constraints revealed

FUJII Toshiakira
Tokyo Gakugei University

Abstract

Since the TIMSS Video study was brought to public attention, and *The Teaching Gap* (Stigler & Hilbert, 1999) was released, many mathematics teachers and teacher educators have become involved in Lesson Study. Outside of Japan, however, it seems that many aspects of Lesson Study that are well understood by Japanese teachers have not readily transferred to other countries. For that transfer to happen, the structure of the Japanese model of Lesson Study needs to be more explicitly defined. This paper tries to clarify key factors embedded in Japanese Lesson study based on the author's experience with short visits to Malawi and Uganda. Some can be viewed as either affordances or constraints on the practice, while others are best understood against several misconceptions that seem to be common outside Japan. The misconceptions include: 1) Lesson Study is a form of workshop; 2) the focus of consideration at a research lesson is the teacher rather than teaching; 3) Lesson Study is an isolated activity; and 4) structured problem solving means having students solve a task; and 5) a research lesson should always be re-taught.

Key words: Lesson Study, Research Lesson, Problem solving Oriented Lesson, Kyozai-kenkyu

1. Introduction

Since the TIMSS Video study has been brought to public attention, teaching activities in schools seem to become one of the most interesting research targets in educational studies. *The Teaching Gap* (James W. Stigler & James Hilbert, 1999), particularly the seventh chapter of that titled "Japan's approach to the improvement of classroom teaching," which is based on Makoto Yoshida's work and now available in Fernandez and Yoshida (2004), provoked enormous interest in Lesson Study as a process for professional development among non-Japanese educators and researchers. In fact, recently not only the U.S. but also other countries such as APEC countries and African nations are keen to implement Lesson Study.

So far, many mathematics teachers and teacher educators are involved in Lesson Study, and many books and research papers have been written on various aspects of Lesson Study and the typical lesson pattern for Japanese problem solving oriented mathematics lessons.

Outside of Japan, however, it seems that many aspects of Lesson Study that are well understood by Japanese teachers have not transferred readily to other countries.

For that transfer to happen, the Japanese model of Lesson Study needs to be more explicitly defined, including the beliefs and attitudes of Japanese teachers that underlie the process of Lesson Study.

This paper tries to clarify key factors embedded in Japanese model of Lesson Study, based on the author's experience with short visits on Malawi and Uganda in Africa, which were conducted as a follow-up study by project IMPULS(#) and JICA. These key factors are characterized as affordances or constrains on Japanese Lesson Study, or misconceptions that commonly occur when the process is implemented outside Japan.

2. Affordances and constrains on Lesson Study

The Teaching Gap (1999, p.150) proposed implementing Lesson Study in the United States. One year later, C. Lewis (2000) identified seven features of the Japanese educational landscape that support the effectiveness of research lessons:

(1) A shared, frugal curriculum
(2) Established norms of collaboration
(3) A belief that teaching can be implemented through collective effort
(4) Norms of self-critical reflection
(5) Stability of Educational Policy
(6) Professional development time is focused on instruction
(7) A focus on the whole child

To the extent that these features may not exist in other countries, they act as constraints on the implementation of Lesson Study. Groves and Doig (2010) identified and examined some of the affordances and constrains in the adaptation and implementation of Japanese Lesson Study outside Japan based on their experiences in Australia, Japan, China, and the Czech Republic. They categorize the affordances and constrains into three headings: Cultural Issues, School Contexts, and Research Lessons. Features (2), (3), and (4) identified by Lewis relate to Cultural issues, (1), (5), and (6) relate to School Contexts, and (3) and (7) relate to Research Lessons.

Cultural Issues

According to Groves and Doig, the cultural issues consist of four factors: tradition, teaching as a public activity, the status of teachers, and a focus on learning as a community rather than an individual activity.

Concerning the tradition, most non-Japanese researchers may be surprised to learn the origin of Lesson Study. Makinae (2010) argues that the origin of Japanese Lesson Study can be traced to U.S. books from the late 1880's. He pointed out that one of these books by Edward Sheldon (1862) describes methods for learning about new teaching approaches through *criticism lessons* and *model lessons* in normal schools. That seems to be the beginning of Japanese Lesson Study. According to Makinae, teacher conferences utilizing criticism lessons were conducted by local school districts in the early 1900s. Some of these conferences were already called "Jyugyo-hihyo-kai (criticism lesson conference) or Jyugyo-kenkyu-kai (Lesson Study conferences). The author has personally investigated and found a reference in a school journal published by a local school called Seishi Elementary School in Tokyo. According to the Seishi journal, the first criticism lesson conference was held May 21, Meiji 19 (1886). This school record also mentions other criticism lesson conferences held in the Tokyo district: "There are many criticism lesson conferences that have been organized in Tokyo around Meiji 20's [1887]" And it continues to say that "a criticism lesson should be held once a month in order to improve lessons; however, the order and method of implementing it is up to the principal of the school." The record thus already shows the significant nature of Lesson Study: that it is school based, teacher-led, and aiming to improve lessons.

The school journal I found is of an elementary school. I could not find documents to prove that criticism lessons had been held at secondary schools. This fact may lead to the present situation, pointed out by Fernandez & Yoshida (2004), which Lesson Study is rarely carried out in Japanese high schools. The reason for this situation might be related to the second point made by Groves and Doig, that of teaching being viewed as a public vs. a private activity. In Japan, teaching seems to be considered public at the elementary school level, but much less so at the secondary school level. Therefore teachers at secondary schools are reluctant to open their lessons to the public.

Groves and Doig (2010) also mention the focus in Japan on the classroom as a community of learners as opposed to a focus on individuals. This is a social norm of classroom culture in Japan, and may be a constraint in other countries with a different norm. This focus on the classroom as a community of learners is a foundation for the problem solving oriented lessons. Without this foundation, the problem solving lesson is difficult to implement. Because of the close connection in the eyes of non-Japanese educators between Lesson Study and Japanese-style problem solving lessons, impediments to problem solving lessons, like these differences in social norms, become obstacles to the implementation of Lesson Study itself. This issue will come up again later.

School Contexts

Groves and Doig (2010) also mentions the effect of curriculum in school contexts. It is commonly said that the U.S. curriculum is "a mile wide and an inch deep." It also varies from state to state. The Japanese curriculum is "a frugal, shared curriculum" (Lewis & Tsuchida, 1998, Lewis, 2000). In *The Teaching Gap*, Stigler and Hilbert ultimately suggest that Lesson Study in the U.S. needs to begin at the local district level simply because teachers need to share knowledge of the curriculum. The lack of common curricular ground impedes effective Lesson Study at levels above the local district. A frugal, shared curriculum may be needed also to implement research lessons designed around problem solving. Observers of such a lesson need to clearly understand why the particular task has been posed. This means the observers need to understand: the value of the task within the curriculum, the prerequisite knowledge needed to solve the task, the position of the prerequisite knowledge in curriculum, the level of difficulty of the task, closely related tasks in other grades in the curriculum, and so on. The value of the task in the curriculum may not be written explicitly in any curriculum, so the teacher needs to do a close study of the teaching materials, a process called *kyozai-kenkyu* in Japanese. The basic information that should be included in a research lesson plan includes the results of this *kyozai-kenkyu*, which is important also for anticipating students' solutions.

The Research Lessons

The research lesson is the critical and focal point of Lesson Study. However, as Groves and Doig (2010) point out, cultural obstacles to implementing Japanese Lesson Study in mathematics arise because research lessons in Japan usually are problem solving oriented lessons or use "structured problem solving" (James W. Stigler & James Hilbert,1999). But this Japanese model of lesson does not fit well with "typical" Australian lessons. In other words, those who adapt Japanese Lesson Study in non-Japanese countries seem to expect or experience a different model of teaching mathematics, one that is unique or distinctive in many ways (Becker, J. P., Silver, E. A., Kantowski, M. G., Travers, K. J., & Wilson, J. W. 1990). Furthermore, the design of a problem solving lesson requires careful consideration of certain details, consideration which is made explicit in Japanese Lesson Study. *The Teaching Gap* describe eight topics that Japanese teachers discuss in detail over the weeks spent planning the lesson. Among them are two topics related to designing a main task or problem, such as "the problem with which the lesson would begin, including such details as the exact wording and numbers to be used," and "the anticipated solutions, thoughts, and responses that students might develop as they struggled with the problem" (p.117). The numbers used in the task directly affect the generality of the task, and thus its connection to the curriculum, and they also affect the ways students will approach the task, and therefore the anticipated solutions. Probably these ways of thinking itself is a tacit idea of Japanese Lesson Study.

So far, the paper describes affordances and constrains to Japanese Lesson Study mainly based on Groves and Doig (2010). In the next section the author describes his experience in Africa focusing on the misconceptions revealed through a follow-up study in Uganda and Malawi. The aim of the follow up study was to see the situation of former participants from African countries who had come to Tokyo Gakugei University to learn the Japanese model of Lesson Study.

3. Misconceptions uncovered through the follow-up study in Uganda and Malawi

Is Lesson Study a Workshop?

If Lesson Study is "A", then there should also be "non-A". Having been exposed to the Japanese form of Lesson Study naturally, it never crossed my mind nor had I given a thought to what this "non-A" might be until I went for a follow-up study in Africa, at which point several misconceptions about Lesson Study became evident. Consequently, I believe that these misconceptions merit attention and need to be addressed.

I learned in Africa that workshops seem to be one form of non-A. Three years after *The Teaching Gap* was published, Lewis (2002) clearly stated the difference between Lesson Study and workshops as follows:

Traditional Workshop	Lesson Study
・Begins with answer	・Begins with question
・Driven by outside "expert"	・Driven by participants
・Communication flow: trainer to teachers	・Communication flow: among teachers
・Hierarchical relations between trainer and teachers	・Reciprocal relations among learners
・Research informs practice	・Practice is research

In America, teachers are familiar with workshops. Upon the introduction of Lesson Study there, it might have been inevitable for Lewis to contrast Lesson Study to workshops. It is impressive that she sees how a workshop begins differently from Lesson Study. The former starts with an answer while the latter begins with a question.

In Malawi, teaching using problem solving lessons were of interest and conferences and demonstration lessons were conducted around this topic. However, as I saw, these activities were treated as workshops.

In Uganda, they have "science-clinic" activities which they consider to be Lesson Study. These well-organized activities included observing live lessons and debriefing them. Good results seem to have come out of these activities which made us, the observers, wonder whether these "science-clinics" are Lesson Study or not.

At the surface, it looks like Lesson Study. However, on a closer examination of the details of the research lesson, particularly of the selection of the topic, one could see a deviation from one of the key points that Lesson Study holds to be important. In

Lesson Study, the topic is chosen for a reason. The chosen topic could be one that is hard for teachers to teach, or for children it may seem to be too difficult, or it may seem easy but important misconceptions arise. The topic may be related to newly-introduced content in the national curriculum. And so on. In the above-mentioned "science-clinic," the selection of the topic seemed to be based on the simplicity of the content, or it was chosen because it was the teacher's favorite topic to teach. Even in the debriefing session, the reason for choosing the topic was never asked or discussed. Instead, the debriefing sessions focused on general issues like teaching techniques.

Considering Lewis's table of comparisons above, the "science-clinic" did not begin with a question, a crucial deviation from Lesson Study. People may ask why it is important to begin with a question. Such a question is important for framing a specific and attainable aim of the lesson, an aim which should be clearly stated in the lesson plan. Starting Lesson Study without such a question would likely result to begin a Lesson Study without a teaching plan. The teachers in Malawi and Uganda seemed to have not yet seriously considered the importance of it.

In Japan, we do not observe a lesson without a lesson plan. This is because the evaluation depends on the aims stipulated therein and the lesson plan serves also as a platform to see the mathematical and educational values of conducting such a lesson. In the context of school-based Lesson Study, the beginning question of a Lesson Study should be connected to the mission of the school and the children's current state. It must be then broken down into an achievable lesson, one with coherent aims and methods. Therefore in Japan, having this shared idea of the necessity of a lesson plan in Lesson Study, the committee assigned for a research lesson provides lesson plan copies for the observers.

Is Lesson Plan to be taught exactly?

The second misconception I saw in these visits is in the African teachers' interpretation of the title "lesson plan." In Japan, a lesson plan is called *gakushu-shidou-an* (学習指導案) which when translated in verbatim English means "learning/teaching proposal." For this reason, if a lesson steers away a bit from what was written in the lesson plan due to the actual classroom situation, this is never thought to be wrong. However, in non-Japanese countries, the idea of a lesson plan like a script, and if everything that is written on the paper is not accomplished, then that reflects badly on the whole enterprise.

In some lessons that I have observed in Uganda and Malawi, the teacher demonstrators got into a situation where they felt obligated to follow the steps in the lesson plan when instead they should have gone with the lessons' natural flow based on the actual classroom scenario. This feeling is probably because of the English translation of "lesson plan" which suggests a sequence of tasks to execute and accomplish in the allotted time. However, if they were to see it just as a proposal the way Japanese teachers see it, and then maybe they would feel differently.

Then what is a "lesson plan" in a Lesson Study? Akihiko Takahashi (2006) said that the lesson plan is equivalent to a research proposal in any research field. Shown below is the comparison between these two fields:

General Educational Research Field	Lesson Study
・Research Proposal	・Lesson Plan
・Data Gathering	・Observing Research Lesson
・Interpretation and Analysis of Data	・Debriefing Session

If teachers consider the lesson plan as a research proposal, then their attitude towards the conduct of the lesson may differ when they face a gap between students' reality and the original plan.

There is no doubt that a lesson plan is a necessary component of Lesson Study. Furthermore this firm belief probed me to re-think the role and function of the lesson plan. One function of a lesson plan is that it serves as a unifying force. The writing of it brings teachers together for a common purpose. Secondly, it brings out the results of *kyozai-kenkyu* (教材研究). When a teacher writes a lesson plan, she may study and draw out the essentials of her instructional materials. The writing process itself is *kyozai-kenkyu* the concrete result of which is the lesson plan. Another role of the lesson plan is that it makes people focus on lessons in terms of teaching, not the teacher. Let me elaborate on this in the next section.

Is the focus of consideration teaching or the teacher?

In the follow-up studies in Africa, I realized that in the debriefing sessions, the participants focused on the teacher who had demonstrated the lesson and not on the teaching that just occurred. This practice was particularly manifested in the science-clinic in Uganda where the object of diagnosis and treatment was clearly the teacher. Just the word "clinic" carries the medical notion someone needs treatment. As a natural result of this, in some lessons that I have observed, participants criticized the teacher during the debriefing sessions. Then the teacher demonstrator strongly defended himself against any criticism. This was not productive. It appeared clear to me that the implicit purpose here of Lesson Study was to improve teachers, not to improve teaching.

At research lessons, participants used checklists. In those checklists the object of analysis and evaluation was the teacher. The use of a checklist is not wrong depending on the context. In Japan, school principals do use a checklist too in evaluating teachers for purposes other than teaching. But the purpose of checklists in Lesson Study in Africa needs to be reconsidered.

When the teachers in both countries studied the lesson plan before observing a lesson, the nature of the debriefing changed significantly, in an appropriate way, from what it was when the teachers did not study the lesson plan ahead of time. This confirmed my thinking that one of the functions of the lesson plan is to shift the focus from teachers to teaching during lesson observation and debriefing.

Is Lesson Study a momentary activity?

In Malawi, the continuity of Lesson Study was not evident. Excellent teaching is not easy to accomplish. This is the reason why Lesson Study is purpose-oriented and an on-going, life-long practice. A clinic is where sick people go to get better. However, in Lesson Study anyone, neophyte or tenured, gets involved in order to better his teaching. This makes Lesson Study different from a clinic. In Japan, teachers believe that the lesson is a proving ground for teachers. They consider *kyozai-kenkyu* inherent in a teacher's life so they are actively involved in this endeavor in the hope of improving their level of teaching. In Lesson Study, continuity is a fundamental feature. In the case of school-based Lesson Study, the members of a certain school set the goals of Lesson Study based on the children's existing state and also on the thrusts of educational reform. The purpose of Lesson Study is coherent and consistent with the mission of that school. Therefore Lesson Study is strongly connected with the educational pursuits of that school. In this light, one may see that continuity is inherent in Lesson Study. Schools keep on trying to improve their educational activities, a self-imposed improvement function. Continuity and self-improvement function are critical factors of Lesson Study which distinguish it from workshops.

Akihiko Takahashi (2001) distinguished two professional development programs, Phase 1 and Phase 2. Phase 1 professional development is for gaining richer knowledge while Phase 2 for developing expertise at using that new knowledge. Lesson Study is an ideal form of Phase 2 professional development.

In Japan, professional development - whether Phase 1 or 2- is embraced naturally by teachers. This is a phenomenon which is difficult to explain to non-Japanese educators. For example, even a workshop-like Phase 1 professional development program in Japan is unlikely to end. Evidence of this appeared in mathematics education monthly journal named *Atarashii Sansuu Kyouiku* (新しい算数教育). That journal has a "Lesson Study now" corner which takes up two pages. That part of the journal introduces a local Japanese group, for example, Mishima Sansuu Kyouiku Seminar. In this seminar, the group meets every first Saturday of the month. Here fresh and veteran teachers are involved where a leader has a key role in that group. They do not observe a live lesson but discuss the content of a lesson plan from several angles. Continuity and self-improvement features are observable there. Ms. Yoko Matsumoto, a member of this group, explained that the motivation of the participants in this seminar is to become more skillful teachers in teaching mathematics. In teaching mathematics lessons, they want to see children's eyes brighten; that is, they want their lessons to be more attractive and interesting. Ms. Yoko Matsumoto concluded that the participants of the seminar absolutely liked mathematics.

Is Structured Problem Solving Lesson just solving a task?

In a structured problem solving lesson in Japan (Stigler and Hiebert, 1999 p. 77), the teacher presents a problem to the students without first demonstrating how to solve the problem. Normal mathematics teaching in the U.S. has never been like this. In the case of Uganda and Malawi, the problem solving approach they employ does somewhat resemble the Japanese way. In fact, teachers in both countries (Uganda and Malawi) highly value student-centered lessons. Hence, during the live lesson observations, teacher demonstrators presented the task and let the students solve the task by themselves just like what Japanese teachers do in a problem solving oriented lesson. However, I felt that this "present a problem/students solve" feature was the only part of structured problem solving lessons which African teachers had understood so far because what they were doing beyond this part were practices which could not be identified with the Japanese approach. Hence, the African teachers seem to have grasped only the surface of the structured problem solving lesson.

The structured problem solving lesson requires not just solving a task but level 3 type of teaching. Professor Sugiyama (2008) distinguished three levels of teaching: level 1: just explain how to do it; level 2: explain how to do it and why; and level 3: let the students discover for themselves how to do it and why. Akihiko Takahashi (2011) summarizes the three levels as follows:

Level 1: The teacher can tell students important basic ideas of mathematics such as facts, concepts, and procedures.

Level 2: The teacher can explain the meanings of and reasons behind the important basic ideas of mathematics in order for students to understand them.

Level 3: The teacher can provide students opportunities to understand these basic ideas, and support their learning so that the students become independent learners.

Level 1 teachers provide the "what and how", and the level 2 teachers provide "what, how and why". These are *instrumental* and *relational understanding* in R.R Skemp's terminology(Skemp,R.R.,1976). Level 3 teachers provide students the opportunities to discover by themselves mathematical ideas resulting from their own thinking and understanding. These teachers help to develop students as independent problem solvers. A Level 3 lesson is student-centered because it is where students discover new concepts, relations, rules, etc.. not out of spoon-feeding or deliberate coaching from the teacher but mostly due to their own efforts. Thus in a level 3 lesson, the bulk of the concepts or ideas originate from the students, and it is their voice which is mostly heard during the lesson. It is here that students become the center of the teaching-learning process and not the teacher. Therefore, teachers who can do student-centered and problem solving oriented lesson are level 3 teachers.

In some instances, it might be misconstrued that doing level 3 lessons makes a teacher's life easy since most of the work is apparently done by the students. This perception is far from reality. Level 3 teaching absolutely requires a lot of work from the teacher. So the question is, what specific "work" is done on level 3 type of teaching besides providing a discovery atmosphere to the students?

Let us take, for instance, the topic, "Fraction divided by a Fraction," that was given by Prof. Sugiyama (2008). A number of people may think that level 3 teaching in this case means the teacher will just pose the problem and then let the students work on it, and whatever happens after this is not so important. This is a typical misconception of level 3 teaching.

In the case of teaching "Fraction divided by a Fraction," important factors to consider include students' prior learning on equivalent fractions, the concept of division, the rule of division, etc. By the rule of division, I mean

$a \div b = (a \times c) \div (b \times c) = (a \div c) \div (b \div c)$, where $c \neq 0$

Such that, for example,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \div \frac{12}{15} = 10 \div 12 \qquad (c = 15)$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}\right) \div 1 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \qquad (c = 5/4)$$

Prof. Sugiyama said that ordinary teaching is not sufficient to deliver a level 3 lesson because it does not consider factors like these. To implement a level 3 lesson, teachers must be able to choose a good task, be able to identify the pre-requisite knowledge, and, most importantly, must be able to nurture children to be able to apply their knowledge to a new situation. And the viability of the students' prior knowledge depends, of course, on the teaching that the students have previously received. In this respect, structured problem solving lesson may also serve, to some extent, as an evaluation of the children's former learning experiences.

In the lessons I saw in Malawi, the teacher posed the task and let the students solve it by themselves. However, the teacher did not foresee many of the responses from the students. This is most likely because the teacher was not able to thoroughly study the instructional materials beforehand, or because he lacked the knowledge of the children's capabilities, or was unmindful of the scope and sequence of the curriculum.

Since problem solving lessons require solving a task that requires pre-requisite knowledge and skills, African teachers tend to think that in doing problem solving lessons, the teacher should develop a lot of concepts, treating all concepts as equally important. This is another misconception. It should be possible to tell which concepts are more significant than the others. Differentiating the significance of various concepts can be done through *kyouzai-kenyu*. Level 3 teaching is then based on a profound *kyozai-kenkyu* by the teacher.

Should a research lesson be always re-taught?

In some countries, teachers believe that re-teaching the research lesson is necessary. In so doing, this practice evaluates the teacher demonstrator's performance and the feasibility of the lesson plan. I think the possible roots of this misconception may stem from the steps in Lesson Study written in the Teaching Gap (p.112-113, 1999). These include: Step 3: Teaching the Lesson; Step 4: Evaluating the lesson and reflecting on its effect; Step 5: Revising the lesson; and Step 6: Teaching the revised lesson. This is wrong, and it is perilous. An inorganic system, like a car, is composed of parts that may be easily replaced. However, in an organic system like a lesson, each part is systemic, not systematic. Changing one problematic part of the lesson does not guarantee things will work out once this part is fixed. Another problem with re-teaching is that it reinforces an idea that the same lesson plan can be used with different students. In this kind of thinking, the students are not an important consideration. This is in outright opposition to a core value of Lesson Study. Consideration of students is not special in problem solving lessons, but is a focus of Lesson Study. Lastly, re-teaching is disrespectful of the students' right to the best education one can provide them. Having the thought of re-teaching at the back of one's mind is like making the first class a pawn in order to improve classroom teaching. This benefits teachers and lesson plan makers at the expense of the children.

4. Final Remarks

Lesson Study in Japan is like air. It is felt everywhere because it is implemented in everyday school activity. Lesson Study is so natural that it is difficult for Japanese educators to identify the critical and important features of it. This is true for researchers as well; Akihiko Takahashi (in press) argues that despite the long history of Lesson Study in Japan, Japanese mathematics researchers and other researchers have not been interested in studying Lesson Study itself until recently. As evidence, he notes that the recent publication by the Japan Society of Mathematics Education, the *Handbook of Research in Mathematics Education* (2010), does not include any research that focuses on mathematics Lesson Study under the section of mathematics teacher education/professional development.

When there is call for us to introduce something of Japanese origin, like Lesson

Study, to other countries, we have to grasp the fundamental nature of it and carefully describe it with due consideration to cross-cultural differences. We have done Lesson Study for over one hundred twenty years as a way of life, without always realizing that we were doing a good thing. This lack of awareness is to some extent a flaw. When people do good things without awareness, the most regrettable case is that people lose it without hesitation. Therefore it benefits the Japanese as well as foreign educators that we identify the authentic nature of Lesson Study.

(#)The Project IMPLUS is a newly established project funded by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science & Technology of Japan. The Project is housed in the Mathematics Education Department of Tokyo Gakugei University, Tokyo, Japan. The purpose of the project is two-fold. First, as an international center of Lesson Study in mathematics, Tokyo Gakugei University and its network of laboratory schools will help teacher professionals from throughout the region learn about Lesson Study and will thereby prepare them to create Lesson Study systems in their own countries for long-term, independent educational improvement in mathematics teaching. Second, the project will conduct several research projects examining the mechanism of Japanese Lesson Study in order to maximize its impact on schools in Japan.

Acknowledgements: The author would like to thank Thomas McDougal for reading and editing numerous revisions, and for his invaluable comments on this paper.

References

Becker, J. P., Silver, E. A., Kantowski, M. G., Travers, K. J., & Wilson, J. W. (1990). Some observations of mathematics teaching in Japanese elementary and junior high schools. *Arithmetic Teacher*, 38(2), 12–21.

Fernandez, C & M. Yoshida(2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*, Lawrence Erlbaum Associates, 2004.

Groves, S & B. Doig (2010). Adapting and Implementing Japanese Lesson Study: Some Affordances and Constraints. *Proceedings of the 5th Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Vol.2, pp.699-708.

Hart, L. C., Alston, A., & Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Now York: Springer.

Inagaki, T. (1995). Meiji Kyouju Rironshi Kenkyu [A Historical Research on Teaching Theory in Meiji-Era]. Tokyo: Hyuuron-Sya.

Lewis, C., & Tsuchida, I. (1998). A lesson like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator*, 22(4).

Lewis, C. (2000, April 2000). Lesson Study: The core of Japanese professional development. Paper presented at the AERA annual meeting.

Lewis, C. (2002). *Lesson Study: A handbook of teacher-led instructional improvement.*

Philadelphia: Research for Better Schools.
Lewis, C., Perry, R., Hurd, J., & O'Connell, M. P. (2006). Lesson Study Comes of Age in North America. *Phi Delta Kappan*, 88(04), 273-281.
Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through Lesson Study: a theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Volume 12(Number 4), 285-304.
Makinae, N. (2010). The Origin of Lesson Study in Japan. *Proceedings of Paper the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education: In Search of Excellence in Mathematics Education*, Tokyo, 140-147.
Skemp,R.R(1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics Teaching, 77, pp.20-26Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.
Sugiyama, Y. (2008). *Introduction to elementary mathematics education* (in Japanese). Tokyo: Toyokan publishing Co.
Takahashi, A. (2000). Current trends and issues in Lesson Study in Japan and the United States. *Journal of Japan Society of Mathematical Education*, 82(12), 15-21.
Takahashi, A. (2006). Types of Elementary Mathematics Lesson Study in Japan: Analysis of Features and Characteristics. [Peer-Review Journal]. *Journal of Japan Society of Mathematical Education*, Volume LXXXVIII, pp.15-21.
Takahashi, A. (2011). The Japanese approach to developing expertise in using the textbook to teach mathematics rather than teaching the textbook. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in Mathematics Instruction: An international perspective*. New York: Springer.
Yoshida, M. (1999). *Lesson Study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Unpublished Dissertation, University of Chicago, Chicago.

HPM と中学校数学教師の専門的成長：上海の１つの事例研究

汪　暁勤
華東師範大学

中国では、中学校数学教師の専門的成長を促す方法は数多く存在する。教師の在職中の訓練養成、教育学修士課程の取得、優秀教師課題研究講座への参加などの方法がある。本研究では、一人の中学校教師がいかなる過程を経て数学教師としての能力を向上させたかを明らかにすることを目的とする。

王先生は 10 年間の教育経験がある中学校の数学教師である。2008 年に、華東師範大学数学学科の修士課程に合格した。大学の勉強では、数学史という授業を履修したことはなく、長年の教育においても数学史に触れたことはなかった。2009 年の夏に、修士課程の「数学史と数学教育」という授業で、数学史と数学教育との関係についての内容を初めて知り、興味を持つようになった。

アメリカの学者 P. S. Jones とイギリスの学者 L. Rogers は、1972 年に開催された第二回国際数学教育大会で数学史と数学教育の国際研究チームを発足した。これは数学史と数学教育との関係（HPM）という象徴的な学術研究領域の誕生であった。この研究チームは 1976 年に正式に国際数学教育委員会の管轄下に置かれた。現在、HPM は数学教育において活発な領域であり、多くの人に重視されつつある。しかし、中国の数学教育では、HPM はまだ全然普及していない。

王先生は 2009 年 9 月の新学期から、数学教育で数学史を導入し始めた。

１．初めて数学史を導入

「相似三角形の応用」というポイントを教授したとき、王先生は教育人生で初めて数学史を使用した。このポイントの教授は三回の授業に分けて行われた。

最初の授業では、相似三角形の性質を復習してから授業の目的を提示した。そして、異なる歴史の時期において相似三角形の性質の測量上での応用を簡単に紹介し、以下の例題を導入した。すべての問題は『九章算術』の直角三角形の一章から引用された。

例１

(1) 正方形の城があり、その東側と南側の中央にそれぞれ門がある。東の門から 15 歩出ると木がある。

問題：南の門から何歩出たら木が見えるでしょうか？（図１）

(2) 東西の距離が 7 里、南北の距離が 9 里の城がある。城の東と南の真ん中に門がある。東の門から 15 歩出ると木がある。

問題：南の門から何歩出たら木が見えるでしょうか？（生徒たちは自分で図を描いて解答を求める）

(3) 正方形の城がある。城の各方向の真ん中に門がある。北の門から 30 歩出ると木がある。西の門から 750 歩出ると木が見える。

問題：城の面積はいくらでしょうか？（生徒たちは自分で図を描いて解答を求める）

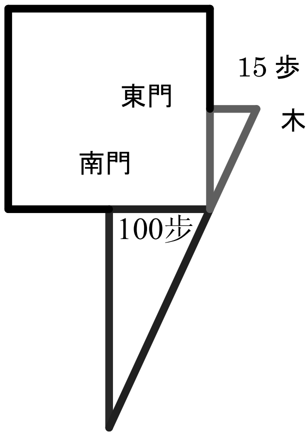


図１　城問題

例２

木の西に山があり、その標高は不明である。山は木から 53 里あり、木の高さは 95 尺である。人は木から 3 里東におり、ちょうど木の先端と山の頂上が斜めの一直線に見える。人の目の高さは 7 尺である。

問題：山の標高はいくらでしょうか？（図２）

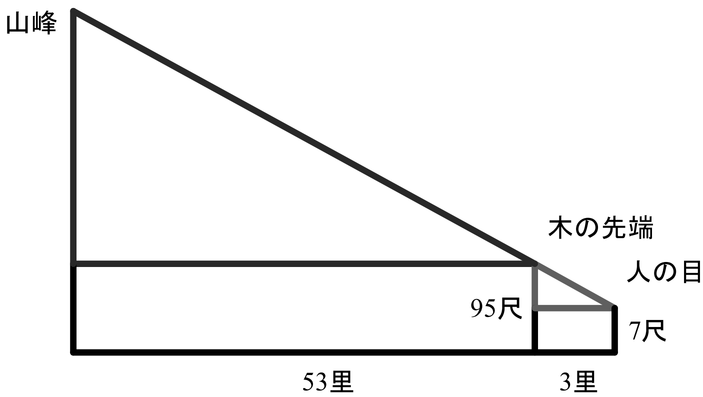


図２　木の西に山の問題

例３

直径 5 尺の井戸があり、その深さは不明である。井戸の上に長さ 5 尺の棒を立て、棒の先端からちょうど水面が見える斜めの直線が直径の 4 寸のところと交差する。

問題：井戸の深さはいくらでしょうか？（図３）

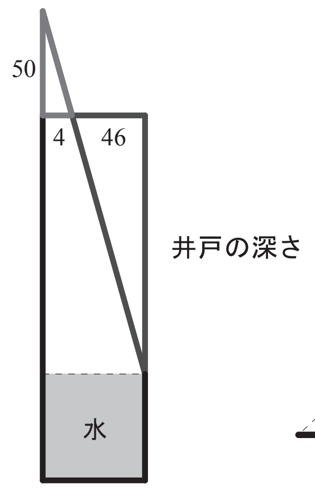


図３　井戸問題

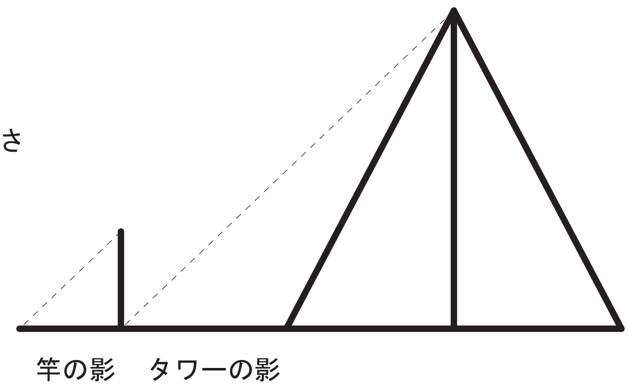


図４　タワーの高さの測定

教師は『九章算術』の内容と魏・晋の時代の数学家劉徴の数学への貢献を紹介し、以下の練習問題を導入する。

練習問題 : 古代ギリシャの幾何学の元祖であるタレスは若い頃にエジプトを巡り歩いたとき、ピラミッドの高さを測定した。タレスの測定方法を再現しなさい。（生徒たちが課題を完成した後で、教師は良い設計案を選んで展示する。図４を参照。）

第二回目の授業では、相似三角形の性質を利用して『九章算術』の「内接正方形の辺」を求める問題を紹介した後で、一般の三角形の内接正方形問題へと進む。

例１

直角三角形の三つの辺の長さは 3、4、5 である。この直角三角形の内接正方形の辺の長さを求めなさい。（『九章算術』の直角三角形の一章の問題によって改変した。）

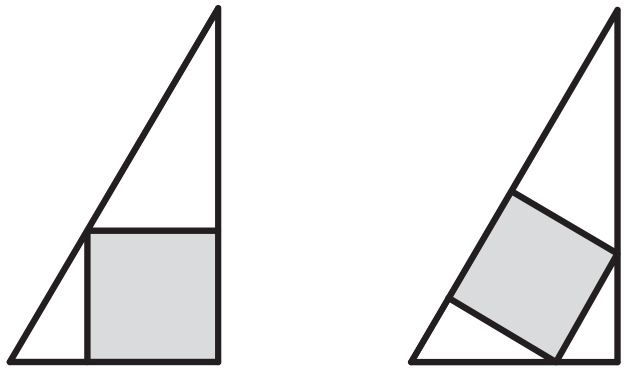


図５　三角形内接正方形問題

まず生徒は独自にこの問題の解答を求め、それからクラス全員で話し合った結果、二つの解答案が出た（図５）。相似三角形の性質を利用して未知数を仮定することによって問題を解決した。教師は、この問題の出典を紹介し、もとの問題を提示する：「高さ 12 歩、底の長さ 5 歩の直角三角形があります。問題：この三角形の内接正方形の辺の長さはいくらでしょうか？」

例２

図６で示されたように、正方形 $DEFG$ の辺 EF は三角形の辺 BC にある。頂点 D、G はそれぞれ AB、AC にある。辺 $BC = 60$cm、高さ $AH = 40$cm、正方形 $DEFG$ の辺の長さを求めなさい。次に、BC の長さと AH の高さを変えずに、三角形 ABC の形を変える。このとき、正方形 $DEFG$ の辺の長さは変わるでしょうか？それは何故でしょうか？

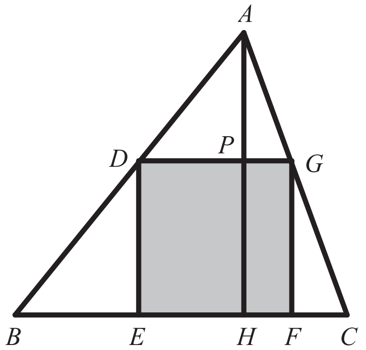


図６　一般三角形内接正方形問題

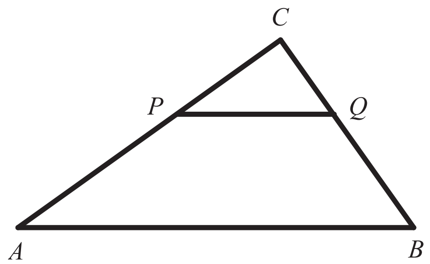


図７　相似三角形性質の応用問題

練習問題：図７のように、三角形 ABC があり、AB=5、BC=3、AC=4、$PQ \parallel AB$、点 P は辺 AC 上にあって（点 A と C と重ならない）、点 Q は辺 BC 上にある。

（1）三角形 CPQ の面積は四角形 $PABQ$ の面積と同じであるとき、辺 CP の長さを求めなさい。

（2）辺 AB 上に点 M があるとき、三角形 PQM を二等辺三角形にするような点 M の存在は可能だろうか？もし存在しないならばその理由を説明し、もし存在するのであれば、辺 PQ の長さを求めなさい。

第三回目の授業では､発展として相似三角形判定定理の実際の問題での応用を紹介する。古代ギリシャの広さ八番目の島であるサモス島に、紀元 6 世紀に造られた給水用のトンネルのエウパリノストンネルがある。トンネルは全長 1036m で、横切断面の幅と高さはそれぞれ 1.8m で、まっすぐ一つの山を貫通している。工期を短縮するために、設計者のエウパリノスは、工事作業チームを二つに分け、両チームに山の両端から同時に作業を始めさせ、最後に山の真ん中に合流するように考案した。現代のように厳密な計器はなかった 2500 年前に､どうやって二つの作業チームに山の底のどこかでちょうど合流させるのだろうか。驚くことに、エウパリノスはそれを実現できた。トンネルが一直線で山を貫通し、両チームの合流作業は天衣無縫なものであった。では、エウパリノスは一体どうやって実

現できたのだろうか。私たちが勉強してきた相似三角形の知識と何か関係があるのだろうか。これらの疑問点からまず生徒たちに議論を始めさせ、その後、教師は古代ギリシャ人の設計方案を紹介する（図８を参照）。(Fauvel & Maanen, 2000)

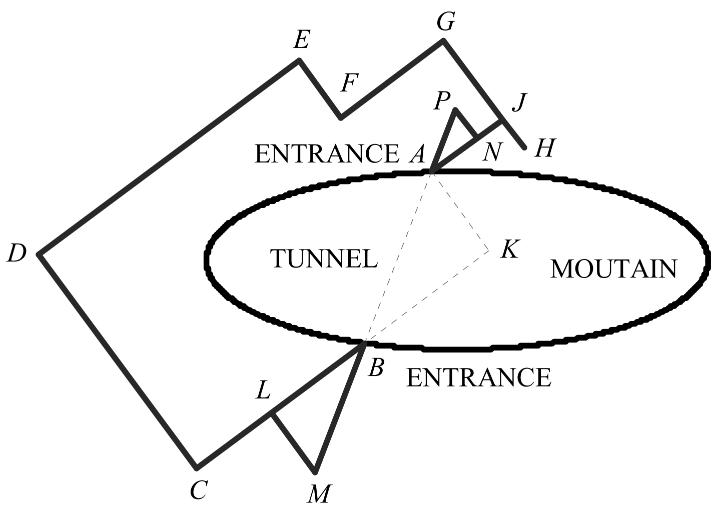


図８　エウパリノスの設計

第一回目の授業では、教師は直接に史料を用いた授業方法を採用した。生徒たちは基本知識がしっかりしているため、簡単にこれらの問題を解決できた。問題の一部が無駄のようなものになり、授業の段取りがなく、数学文化の多元性が欠けるように思われ、数学史の魅力を十分に表すことができず、「歴史を紹介するための授業」のようにも思われる懸念がある。第二回目の授業では、教師は中国漢の時代の「直角三角形」の問題から授業を始め、その後練習問題を導入した。歴史上の有名な問題を使って伏線を敷いたため、生徒たちはこのような問題に深い印象を残し、良い効果を得られた。第三回目の授業は生徒たちが一番好きな授業であった。生徒たちは、物語に興味津々で、集中して問題を考えていた。このような見事な解決方法は、まさに今学んでいる「相似三角形」の知識を利用したのもであったため、生徒たちは自分の数学に対する考えを見直した。彼らは嬉しくて気持ちが高ぶっていた。古代ギリシャの数学文明への憧れ、サモス島のきれいな景色の満喫、エウパリノスへの尊敬、幾何学の不思議な力への驚嘆等々、数学史の導入によって、予想以上の効果を得ることができた。

授業の後で行われたアンケート調査によると、84.4%の生徒は数学史に関する知識に興味があって、86.7%の生徒は数学史の数学教育への導入に賛成し、さらに、93.3%の生徒は数学史を知りたくて数学史の役割を積極的に評価することが分かった。これらの評価は、Fauvel (1991)で述べられた数学史の教育的意義のほとんどを支持するものであった。

２．研究活動

王先生は生徒たちの反応に奮い立たせられ、数学教育における数学史使用の試みを続けることにした。その後、王先生は他の中学校に転勤、以下の内容において、「中学校数学教

育における数学史の導入」という研究活動を計画していた。

- 文字で数を表す；
- 同じ底を持つ数冪の乗法演算；
- 平方の差の公式；
- 実数の概念；
- 平方根の近似値の求め方；
- 合同三角形の応用。

以下、「合同三角形の応用」を例とし、王先生が数学教育における数学史を使用した授業を紹介する。

まず、「ナポレオンは河に遭遇」の物語から、授業を始める。

「皆さん、ナポレオンという名前を聞いたことがあると思いますが、この有名なフランス軍事家は戦場で千軍万馬を指揮し、世の中を大きく動かしていった人物です。ナポレオンは「学者を軍隊に入れよう」という命令を伝達したことがあります。この命令はナポレオンが学者を尊敬して重視する有名な一句となりました。何故ナポレオンが学者を尊敬するのかについて、それには原因があります。ある日、行軍途中、彼の部隊は流れの激しい川に前進が阻止されました。川を渡るために橋を架けないといけません。しかし、橋を架けるための材料を持ってきていないので、はやく探さないといけません。どのぐらいの材料がいるのかについては、川の大体の幅を測らないと分かりません。どうやって川の幅を測れるかが分からなくて、この千軍万馬の指揮者は焦ってうろうろしていました。では、皆さん、ナポレオンの代わりにどんな方法があるのかを考えましょう。」

王先生は以下のように計画を立てた。問題を提示するだけで、生徒の考えを束縛しない。もし、生徒はどうしても解けなかったら、合同三角形の知識を用いることをヒントとして提示する。数学教育でいわゆる「学んだことを実際に活用する」のは、問題を解くことそのものに限られており、先ほどの実際の問題において難しいと予測される。この点について、授業後のインタビューでは、「一番最初先生から出された問題にたいして全く分からなかった」という回答からも示されたと言えよう。

生徒たちが困っている顔を見て、王先生は「合同三角形の知識を使ったらどう」と生徒たちにヒントを出した。生徒たちは方向性をみいだし、アイディアが次々と生まれてきて様々な方法を考え出した。中には、このような解き方が出された。A は川の対岸にある参照物で、BD は地面と垂直関係にある竿である。目測することによって$\angle ABD = \angle CBD$ のようにし、そうしたら$\triangle ABD \cong \triangle CBD$になる。すなわち、川の幅は $AD = CD$ のようになる。この方法はまさに古代ギリシャの数学家タレスの測定方法であった。しかし、この生徒の説明は分かりやすいものではなかったので、多くの生徒にとってこの方法についてまだ明白ではなかった。そこで、王先生の用意した教具が役に立った。

ここで、王先生は生徒に「軍隊にいる一人の技師はタレスの測定方法に基づいて素早く川の幅を測れたので、ナポレオンに称賛された。そこから学者はナポレオンに重視されるようになった」と伝えた。

ここからタレスの測定方法を具体的に紹介する。タレス（Thales，紀元前 6 世紀）は、古代ギリシャの幾何学の元祖であり、古代ギリシャの初めての数学家と哲学家である。若い頃にエジプトを巡り歩き、相似三角形の知識を用いてピラミッドの高さを測ることがで

きたこと、日食を予測して一つの戦争を阻止したこと、合同三角形と相似三角形の知識を使って船と海岸の距離を測れたこと、などがあった。

図９のように、タレスは高い丘（或いは崖や灯台）にて簡単な道具を使って川の幅を測定した。地面と垂直に交わる竿 EF がある。竿に釘 A が固定されている。釘 A によってもう一本細い竿を自由に回すことができ、そして任意の場所に固定することができる。この細い竿を回して川の対岸の一点 B に固定する。それから、竿 EF を回して（地面と垂直のまま）、細い竿を川岸上の一点 C に固定する。二辺夾角相等（SAS）の定理によって、$DC = DB$ になる。

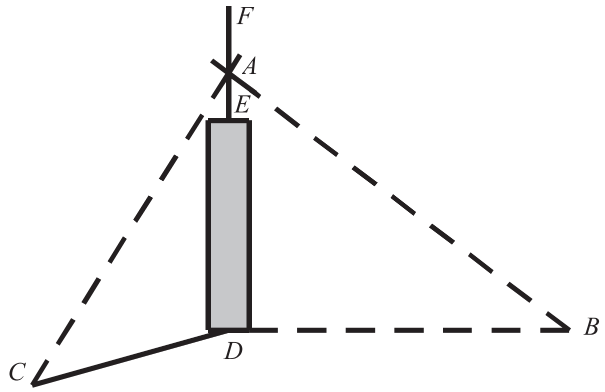


図９　タレスの遠距離測定方法

以上の方法を紹介してから、クラスで再現する。

「では、タレスの方法を一緒に実演してみましょう（図 10）。」合同三角形の知識によって、教師が用意した２本の竿を使って教室の前の黒板と後の黒板の間の距離を測定する。

「先ほどの方法以外に、何か他の方法があるでしょうか？」

図 10　生徒がタレスの方法を実演している様子

ヒントにより生徒たちは次々と新しい方法を考え出した。例えば、合同三角形の方法や（図 11‐13）、直角三角形の知識を利用した方法、相似三角形の知識を利用した方法（第一余弦定理の知識を含む）である。生徒たちの知識面が広く議論が活発化したことは、教師の想像以上であった。授業の時間が限られているため、王先生は生徒たちに互いに話し合って考えた方法を宿題で整理させた。ここで、興味深いことがひとつあった。図 12 で示された方法２は、まさに数学歴史学者の推測によるタレスのもう一つの測定方法である。

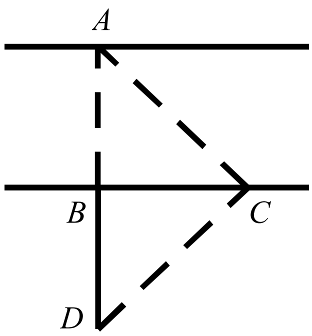


図 11　合同方法１

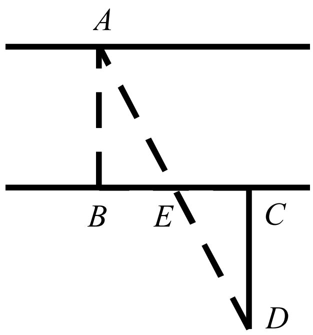


図 12　合同方法２

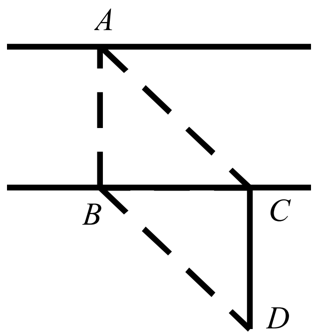


図 13　合同方法３

最後は合同三角形の更なる応用編である。

問題１　図 14 のように、公園に Z 字型の道 $ABCD$ がある。道 $AB /\!/ CD$ で、道 AB と BC に小さい石の椅子 E と M がそれぞれあり、椅子 M はちょうど道 BC の真ん中にある。道 AB に車が一列にとまっているため、B と E の間の距離を直接測ることはできない。では、何か良い方法があるだろうか。その理由を説明しなさい。

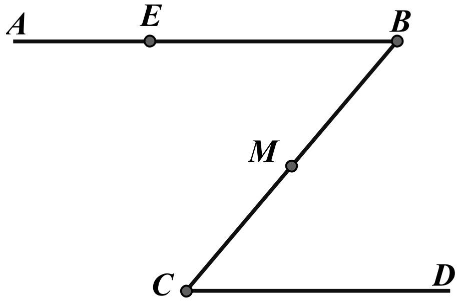


図 14　公園で距離を測定

問題２　中学校のある課外活動チームは、自分たちが学んだ知識を使って何か意義のあることをしようと考えている。彼らは学校の近くの公園にある一つの池を見つけた。この池の両端 A と B の間の距離を測ろうと計画している。何か良い方法があるだろうか。

「合同三角形の応用」の授業について、王先生は一部の生徒（S）と教師（T）にインタビューを行った。

(1)「合同三角形の応用」の授業について、感想を聞かせてください。

S1 : 先生の独特な話し方に引かれて、授業はとても面白かったです。生活にある実際問題を解くことは印象深く実用的で、ただ単に教科書の数学問題を解くことと全然違います。そして生徒同士が議論をすることによって互いに啓発されることもあります。授業のやり方はとても新しく、数学の知識を勉強すると同時に他の知識も得ることができます。実際の日常生活にある問題を議論して、理論だけに限らないことがとてもいいと思いました。

S2 : 授業中のすべての話に興味があって、授業の効率をあげることができます。何年経っても物語は頭の中に残ると思います。塾に行くとき、似ている問題を他の学校の生徒に聞いてみたら、「どうやって合同三角形の知識を使うのか」について全く分からないと言っていました。そのとき、私は博士みたいな感じがして、とても誇りに思いました。同じことを他の生徒に教えるときにも、とても楽しかったです。

T1 : この授業では、私は初めて数学史に登場した人物を知り、数学が歴史の流れの中での経済と文化に対する重要性も知るようになりました。とても興味深くて自分も是非やってみたいと思っています。

T2 : このような授業は、教師と生徒の両方にとってとても面白いと思います。生き生きした授業を通して、生徒たちは積極的に授業に参加していました。これは教育と実践との合体の良い例だと思います。しかし、授業の準備がきっと非常に大変だと思います。

(2) このような授業は実際に役立つと思いますか？どんな面で役立つと思いますか？

S3 : この授業を通して日常生活にある物事に好奇心を持つようになりました。これから、身近にあるものにもっと感心を持ち、自分の視野を広げようと思います。日常生活にある問題はそこまで難しくて解決できない問題ばかりではないと気づきました。一つ例があったら、どんどん解決策が出てくると思いました。

S4 : 授業を通して数学史に関する知識が増えました。今まで数学史についてほとんど知りませんでしたが、それらの知識を知ることはとても大事だと思います。歴史の知識はテストでは使わないかもしれませんが、実際の問題を解決するという観点から見ると、とても実用的なものだと思います。それだけではなくて、印象深く、自分が積極的に問題を考えるようになって、もっともっと知りたいようになったと思います。先生が問題を出したときに、とても答えを知りたいと思いました。

T3 : 授業はとても役に立つと思いました。普通の授業では、理論を実際の問題に応用することが少なく、この授業を通して生徒たちが「学んだ知識を実際に使ってみる」というふうに積極的に考えるようになることに役に立つと思います。

T4 : この授業は生徒たちにとって役に立つと思います。生徒たちが実際の問題を解決するようになり、数学に対して新しい認識が生まれてきて数学が好きになると思います。

(3) このような授業に対して何かアドバイスがありますか？

S5 : 学校にこのような授業を週一回で開講してほしいです。あるいは、このような課題研究チームを立ち上げ、私たちに参加できるようにしてほしいです。本当にこのような授

業にたくさん参加したいと思います。

T5 : このような授業の成果を皆で共有できるように、モデル授業をたくさん行ってほしいと思います。生徒たちに数学と日常生活の密接な関係や、日常生活にある数学問題などに気づかせることによって、学んだ知識を使って実際の問題を解決させます。すべての授業がこのような方法で行われると生徒たちはきっと数学が好きになると思います。

教師と生徒へのインタビューや生徒たちに対するアンケート調査の結果から、王先生のこの授業は、とても理想的な効果を収め、みんなに評価され成功したものだといえよう。

３．王先生の変化

授業観察や王先生本人、同僚の先生、そして区の教育研究員とのインタビューから、二年間の数学史を用いた数学教育を通じて王先生に大きな変化があったことが分かった。主に以下の面について紹介する。

３．１　自分なりの教育スタイルの形成

一人の中学校の数学教師にとって、自分なりの教育スタイルを形成することは難しいものである。特に、10 年間の教育経験者にとっては、新しい原動力がない限り、新しい方法を探って前進することは難しいのであろう。HPM の導入により、王先生は、数学教育の新しい境地を切り開き、自分なりの教育スタイルを形成しつつある。

数学史を利用して授業を導入　「平方差公式」の授業では、王先生は歴史人物（趙爽、ディオファントス）及び歴史の知識を教科書の内容と融合させ、三者が一つになって良い効果を得ることができた。

数学史を用いて難点を突破　「アルファベットで数を表す」の授業では、「ピタゴラスによる形と数」を考えさせ、「形と数の統一性及びアルファベットで数を表すことの簡潔さ」を生徒に示し、スムーズにポイントを解決して難点を突破することができた。

歴史問題を練習問題として採用　「相似三角形の応用」の授業では、『九章算術』の中の問題を例題として提示し、生徒に観察と思考の重要性を気づかせ、生活の至るところまで相似三角形が存在することを実感させることができた。

数学史を授業のまとめで活用　「図形の移動」の授業では、王先生は生徒に国内外の有名な芸術家の作品や建築家の作品を 10 分ぐらい鑑賞させた。これらの作品のほとんどは幾何学の図形そのものや、図形の平行移動、回転移動、対称移動などの知識に関連するものである。

問題解決の歴史上の方法と教科書の方法との比較　「接近法の考え方を用いて $\sqrt{2}$ の近似値を求める」の授業では、王先生は教科書の方法と古代ギリシャの数学家ヘロンの方法とを比較することによって生徒たちの思惟を広げることができた。

数学史を用いて知識誕生の過程を再現　「同じ底数の冪の乗法」の授業では、王先生はアルキメデスの『砂の計算者』を用い、冪の誕生の話を再現した。生徒にアルキメデスの「砂を計算する」という方法を考えさせ、冪に関する数多くの演算法則を習得させることができた。

数学史を数学教育へ導入することによって、王先生の数学授業における「文化の雰囲気」が感じられ、独特な教育スタイルが形成された。そして、王先生自身も栄誉をになって学

校の数学教育研究チームのリーダーになった。

３．２　生徒の問題認識へのより深い理解

歴史発生の原理によると、生徒たちの数学概念に対する理解は数学概念の発展と似ているような過程を持つという。両者のこの類似性は有益な知見を与えてくれる。すなわち、生徒がある知識を勉強するときに遭遇しそうな困難点を予測するために、我々教師はまずその知識の誕生の歴史を調べ、その歴史によって生徒の問題認識に相応しい教案を作成することができる。

「文字で数を表す」という授業を例として紹介する。王先生は数学史を研究する前に、この授業に対する理解が参考書に載せてある「アルファベットが演算法則を表すこと、公式を表すこと、方程式の中の未知数を表すこと、変化規則がある変数を表すこと」に限られていたという。しかし、数学史の研究をすることによって、王先生は「アルファベットで数を表す」の三つの歴史変化過程があることが分かった。すなわち、第一段階はアルファベットが未知数を表す段階であり、第二段階はアルファベットが任意数を表す段階であり、第三段階はアルファベットが変数を表す段階である。そして、生徒が代数を勉強するとき、この三つの段階を経験することになる。よって、数学史の知識は王先生の教案作成に理論的な根拠を提供してくれた。

HPM の先駆者であるアメリカの数学史家カジョリ（F. Cajori, 1859～1930）は、「生徒たちが遭った困難点はそのほとんどはこの領域の科学を作った人が長年に渡って考えたり、議論したりすることによって解決した困難点である。」と指摘している (Cajori, 1899)。また、スミス（D. E. Smith, 1860～1944）によると、「社会を困惑するものは子どもたちを困惑することもある。よって、社会の困難を克服することは、子どもたちが発達するとともに社会と似ている方法を使って困難を克服することを示唆する」という（Smith,1900)。そして、クライン（M. Kline, 1908～1992）はカジョリ及びスミスと同様な観点から、「歴史上の数学家たちが遭った困難点は、まさに生徒たちが勉強するときの障害物になる。よって、数学史は数学教育の指針である」と指摘した (Kline, 1966; 1970)。

数学史への理解を深めるにつれ、王先生は生徒たちが勉強するときに出てきた間違いや困難点に対する理解をも深めるようになった。これらの間違いや困難点に対し、王先生は数学史を研究することによって、その原因を探求するようになった。

３．３　批判的且つ鑑別的に教材を見る力の向上

研究が進むにつれ、王先生は HPM の観点から教材を見るようになり、批判的に教材を見る能力を向上することができた。以下は王先生の教材にある「合同三角形」の判定定理への考えである。

数学の教科書では「二辺夾角相等」、「二角夾辺相等」、「角角辺（翻訳者注：二角と二つの角の中の一つの角の対辺が相等しい場合。)」、「三辺相等」の四つの判別方法が載せてある。その中、「二辺夾角相等」、「二角夾辺相等」の証明はプランニング法よって解説されている。しかし、「三辺相等」に対しては、証明方法が出されておらず、直接に定理が提示されている。注釈の形で、「三辺相等三角形の合同」の定理の証明は今後の内容では付け加えると説明した。筆者は王先生の教案を調べたところ、この授業の「注意事項」では以下の記述があった。「教科書では、「三辺相等」の判定方法は、証明されずに直接に提示され、その判定方法は八年生の第一学期に紹介すると記述されている。また、斜辺と隣辺が相等

することによって直角三角形の合同を判定する方法は、直角三角形の知識に分類されている。実際に、教科書では、二つの三角形をつなぎ合わせる方法と二等辺三角形の知識を利用して直角三角形の合同の証明だけがなされており、「三辺相等」定理に関しては更なる説明がなされなかった。しかし、三角形をつなぎ合わせる方法と二等辺三角形の知識を使って「三辺相等」の定理を証明するのは、八年生ではなく、教科書の内容によって二等辺三角形の知識を勉強した後の七年生前期でできよう。」

数学史によると、ビザンツ帝国の数学家フィロ（Philo，紀元前 1 世紀）は、「二つの三角形の中の一つを移動し、一つの辺を対応するもう一つの三角形の辺と重なるようにする。そうすると、この辺を対辺とする頂点とこの頂点が対応するもう一つの三角形の頂点は重なっている辺の両側にある。この二つの頂点を線で繋げると二つの二等辺三角形になる。重なっている辺を対辺とする二つの頂角の大きさが同じなので、「二辺夾角相等」の定理によって二つの三角形は合同であることが分かる」という方法を考え出したという。つまり、数学史の知識が分かることによって、短い期間だけで合同三角形の知識は体系化され、数学知識そのものだけではなく、その知識の由来も分かるようになる。これは数学史の教育的意義を示すものである。

王先生は合同三角形と二等辺三角形の教案を作成したとき、ある箇所に対して教科書にある例題を修正した。例えば、「二辺夾角」、「二角夾辺」、「角角辺（翻訳者注：二角と二つの角の中の一つの角の対辺が相等する場合。)」、この三つの定理を教えた後で、例題授業の形で二等辺三角形の合同証明を生徒たちに教えた。そして、教科書にある線を加える方法以外に、ユークリッドの証明方法も紹介した。

図 15 のように、$\triangle ABC$ があり、$AB = AC$ ならば、$\angle B = \angle C$

証明：線 AB を点 D まで延長し、また、線 AC を点 E まで延長し、$AD = AE$ にする。

そうすると、$\triangle ADC \cong \triangle AEB$（SAS）になる。

よって、$\angle E = \angle D$、$BE = CD$

そうすると、$\triangle BCE \cong \triangle CBD$（SAS）

よって、$\angle DBC = \angle ECB$

よって、$\angle ABC = \angle ACB$

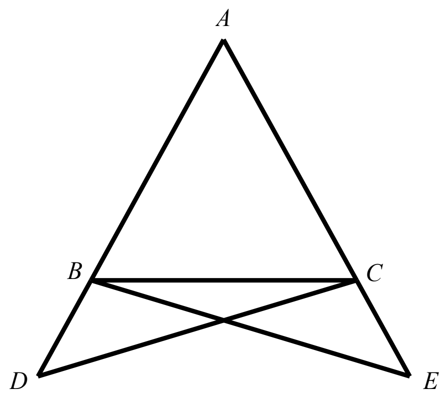


図 15　二等辺三角形の底角の大きさが同じであることのユークリッドの証明方法

前述した「等辺の対角も同じ」という知識があるため,「三辺相等」定理の証明は自然にできるようになるのであろう。数学史があったからこそ，王先生は「創造的教材を使用すべき」という教育課題を実現できた。

３．４　ある教師の数学の教育的研究をする能力の向上

二年間の活動によって、王先生は数学教育を研究する力を向上することができた。王先生は『数学教育』で論文を発表し、上海市教育論文三等を受賞した。また、他の論文を投稿して審査を受けている。王先生は上海市静安区における中学教師のスピーチコンテストに出場した唯一の数学教師であった。そして、王先生は「数学史を導入し、思考を活発化」をテーマとしたスピーチによって一等を受賞した。

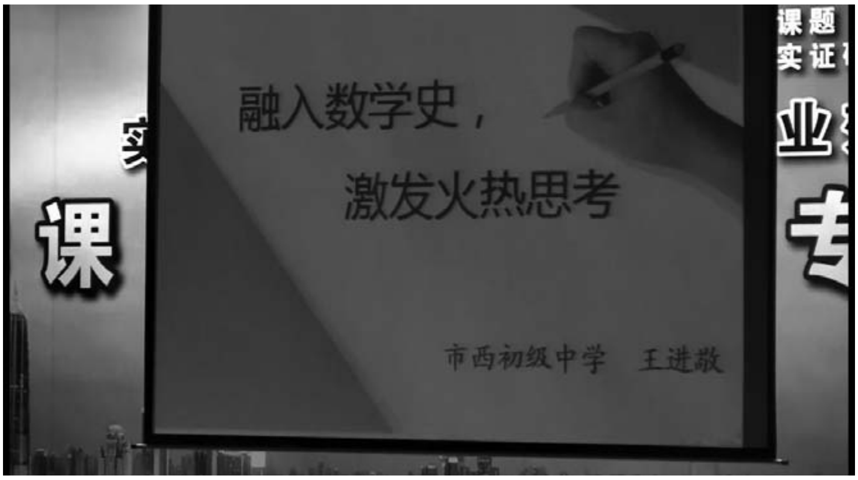


図 16　王先生のスピーチ「数学史を導入し、思考を活発化する」

2011 年 5 月に華東師範大学で開催された第四回「数学史と数学教育国際研究会」で、王先生は「中学数学教育に数学史を導入する活動に関する研究」を題とした学術報告を行い、大会参加者に高く評価された。これを機に、王先生は数学教育界で広く知られ、不定期的に華東師範大学の数学教育の専門家や大学院生、及び同じ志を持つ数学教師と会を開き、中学数学教育における数学史や HPM の観点から見た数学教育などのことを議論するようになった。今王先生は華東師範大学の HPM チームメンバーの一員になった。

「実際に使うときになったら知識が足りないと思ったりする」。王先生は HPM 領域に入ってから、自分の数学史に関する修行がまだまだ足りないと実感し、広い範囲で数学史に関する書籍や論文などを読むようになった。

４．結論

王先生の事例から、HPM は中学数学教師の能力の専門的成長を促すことができると言えよう。しかし、調査によると、中学校の数学教育における数学史の導入は「評判が良いが、応用が難しい」ことが分かった。その原因の一つは、ほとんどの数学教師にとって数学史に関する知識が少ないことにある。よって、教師の訓練養成講座では、数学史を用いた数学教育の訓練を強化する必要があろう。そして、その訓練は、ただ数学史を紹介する

ものだけではなく、中学数学の知識に隠されている各ポイントの歴史を探求することによって、歴史を数学教育に活用できるようになるものである。そうすると、数学教師は数学史に対して興味を持つようになるだろう。また、数学教育研究者が、HPM を利用した学習指導案を開発し、それを授業実践に適用することによって、現場の数学教師は数学教育における数学史の効果を実感できるようになると考えられる。もっと多くの数学教師はHPM 領域に足を踏み入れるだろう。

HPM を理論から実践まで持っていくために、大学の研究者と現場の中学数学教師との交流を深める必要がある。研究者は数学教育のための数学史を研究し、現場の教師はその研究成果を実際の教室の授業で活用する。王先生の事例は、まさに研究と実践の統合の１つの成功例である。

参考文献

１）Cajori, F. (1899). The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 7(5): 278-285.

２）Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6.

３）Fauvel, J. & Maanen, J. van (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 91-92.

４）Kline, M. (1966). A proposal for the high school mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, 59 (4): 322-330.

５）Kline, M. (1970). Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, 77 (3): 264-282.

６）Smith, D. E. (1900). *Teaching of Elementary Mathematics*. New York: The Macmillan Company, 42-43.

HPM and Development of the Professional Competency of Junior High School Mathematics Teachers
: The Case Study of a Teacher in Shanghai

WANG Xiao-qin
East China Normal University

China has a large number of methods for developing the competency of junior high school mathematics teachers. They include training of teachers in service, master degree programs in education, participation in super teachers' research project seminars, etc. This paper aims to make clear the processes in which a junior high school teacher has developed her competency as a mathematics teacher.

Ms. Wang is has been a mathematics teacher in a junior high school for ten years. She entered the Department of Mathematics in the Master Course of East China Normal University in 2008. She had never studied the history of mathematics at university, nor had experienced it in her long career of mathematics teaching. In the summer of 2009 she attended a class "The history and pedagogy of mathematics" in the Master Course. She recognized the relations between the history and pedagogy of mathematics for the first time, and was increasingly interested in it.

At the second international congress of mathematics education in 1972, P.S. Jones, an American scholar, and L. Rogers, a British scholar, organized the International Study Group on the relations between the HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS. This is a creation of a new academic research area regarding the relations between the history and pedagogy of mathematics (HPM). This research group was formally placed under the supervision of the Committee of International Mathematics Education in 1976. HPM is an actively investigated area at present, which has been attracting many people's increasing attention.

Ms. Wang began to introduce the history of mathematics in her mathematics education at the new semester of September in 2009.

1. Introduction of the history of mathematics for the first time

In treating "application of similar triangles," Ms. Wang introduced the history of mathematics for the first time in her teaching career. Teaching of this topic was divided into three lessons.

The aim of the first lesson was presented after reviewing the characteristics of similar triangles. A brief introduction to application of how to measure the characteristics of similar triangles in different historical periods was given with an example as follows. All examples were quoted from Chapter 1 on right-angled triangles of "九章算術" *(the Nine Chapters on the Art of Mathematics).*

Example 1. (1) There is a square shaped castle with the eastern and southern sides having a gate at the center. With fifteen walking steps from the eastern gate, you will see a tree.
Question: With how many steps from the southern gate, can you see the tree?

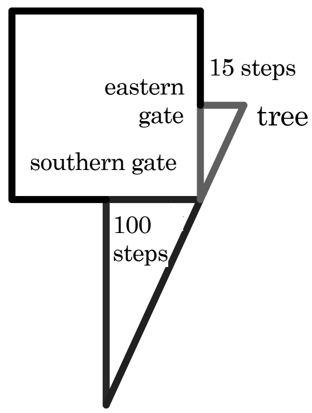


Figure1. Question on a Castle

(2) There is a castle with the distance between its east and west being 7 ri (3.92 km), and that of its south and north being 9 ri. The castle has a gate at the center of the eastern and southern sides. With fifteen waking steps from the eastern gate you can see a tree.
Question: With how many steps from the southern gate, can you see the tree? (The students are required to answer it by drawing a figure for themselves.)
(3) There is a square shaped castle. There is a gate at the center of each side of the castle. With 30 steps from the northern gate you can see a tree. With 750 steps from the western gate you can see a tree.
Question: What is the area of the castle? (The students are required to answer it by drawing a figure for themselves.)

Example 2. There is a mountain to the west of the tree. Its height is uncertain. The mountain is 53 ri far from the tree, whose height is 95 shaku (30.3 cm). With 3 ri to the east of the tree, one can see both its top and the summit of the mountain diagonally in a straight line. The eye height is 7 shaku.
Question: How high is the mountain?

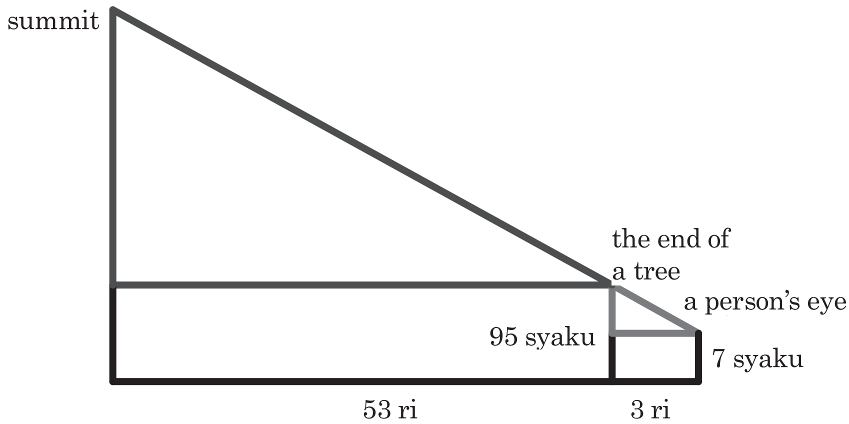


Figure2. Question of the mountain being to the west of the tree

Example 3. There is a well of 5 shaku. in diameter. The depth is uncertain. We set up a rod of 5 shaku in length on the well. The diagonal straight line from the top of the rod touching exactly upon the surface of the water intersects at the point of 4 sun (3.03 cm) away in the diameter of the well.
Question: How deep is the well?

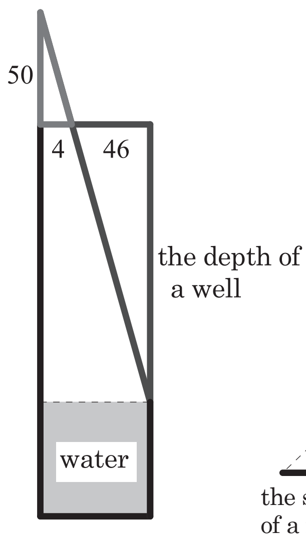


Figure3. Question on the well

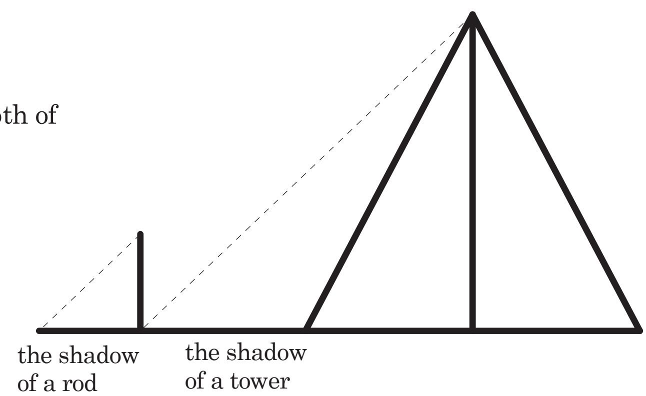


Figure4. Question on the height of the tower

The teacher introduces the contents of *the Nine Chapters on the Art of Mathematics* and Tocho, a mathmatician's, contribution to mathematics in the periods of Gi and Shin, and gives exercises: Thales, originator of the ancient Greek geometry, when young, visited Egypt and measured the height of Pyramids. Represent how Thales measured it. (Among the representations by the students the teacher chooses excellent ones and exhibits them. Refer to Figure 4.)

In the second lesson the teacher introduces a question to ask about the 'side of inscribed quadrangle' in *the Nine Chapters on the Art of Mathematics* based on the characteristics of similar triangles, and proceeds to a question of the inscribed quadrangle in a general triangle.

Example 1. The lengths of the three sides of the right-angled triangle are respectively 3, 4, and 5. Answer the length of the side of the inscribed quadrangle in this right-angled triangle. (This question is a modified one based on Chapter 1 of *the Nine Chapters on the Art of Mathematics*.)

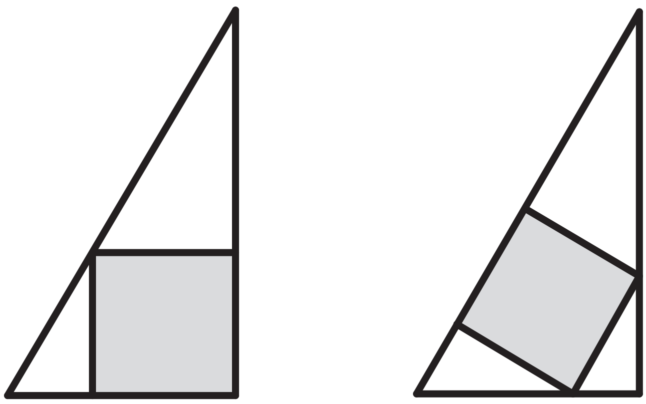


Figure5. Question on the inscribed quadrangle in a triangle

First the students tried to answer this question for themselves, and talked about it with one another. They put forward two solutions (Figure 5). They solved this problem by employing the characteristics of similar triangles and assuming unknown quantities. Quoting the source of this question, the teacher showed the original one: 'There is a right-angled triangle of 12 ho (steps) in height and 5 ho (steps) in depth. Question: What is the length of the side of the inscribed quadrangle?'

Example 2. As is shown in Figure 6, the side *EF* of the square is on the side *BC* of the triangle. The vertexes *D* and *C* are respectively on *AB* and *AC*. Answer the side of the square *DEFG* (the side *BC*=60cm, the height *AH*=40cm). Furthermore, without changing the length of *AH* and the height of *AH*, let us change the shape of a triangle *ABC*. In this way does the length of the side of the square change. If so, why?

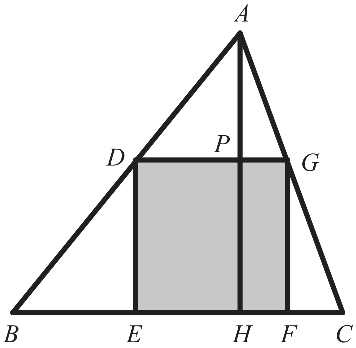


Figure6. Question on the inscribed quadrangle in a triangle

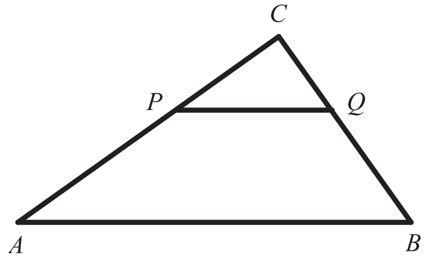


Figure7. Applied question on the characteristics of similar triangles

Exercise: As shown in Figure 7, there is a triangle ABC (AB=5, BC=3, AC=4, PQ // AB). The point A is on the side AC (the points A and C do not overlap), and the point Q is on the side BC.

(1) Suppose that the area of the triangle CPQ is the same with that of the quadrilateral $PABO$, answer the length of the side P.

(2) Suppose that the side AB has the point M, let us transform the triangle PQM into an isosceles triangle. Is it possible to assume this kind of M? If it were not for M, explain the reason why. If there exists M, answer the length of the side PQ.

In the third lesson of an advanced level, the teacher deals with application of the theorem of similar triangles to a practical question. There is a tunnel for supplying water—Eupalinos tunnel—which was built up in the six century on Samos Island, the eighth largest island in the ancient Greece. The tunnel has a total length of 1036 meters. The width and height of the cross-section of the tunnel are respectively 1.8 m. It passes through the mountain straightforwardly. To shorten the construction period, Eupalinos, the architect, divided the manufacturing team into two groups, and made each group begin to build the tunnel from the two ends of the mountain at the same time, and successfully join together at the center of it. 2500 years ago when they had no exact measuring instruments, I wonder why he could direct those two groups to join together somewhere at the bottom of the mountain. To my surprise, Eupalinos did it. How can we believe that the tunnel passed through the mountain! The idea of both groups merging with each other was only natural and artless. I have no idea as to how Eupalinos did achieve this construction. The teacher encourages the students to ask these questions and to discuss them. Later she explains how the ancient Greek designed the construction. Refer to Figure 8. (Fauvel & Maanen, 2000)

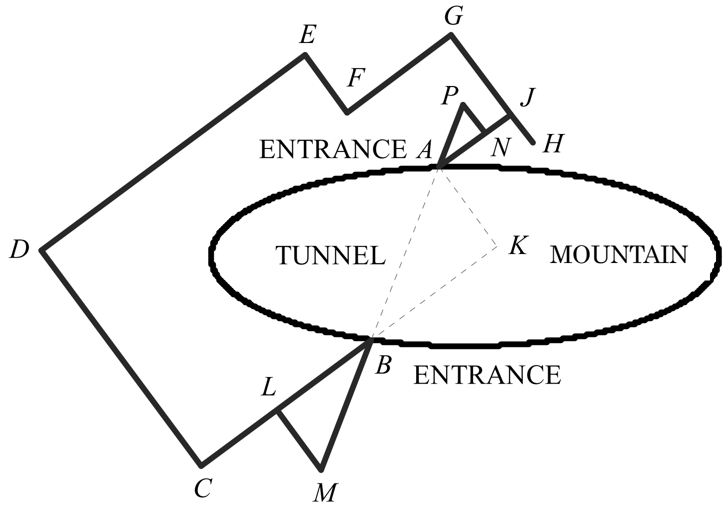


Figure8. Eupalinos's design

In the first lesson the teacher adopted the method to deal directly with the historical materials of mathematics. The students had already had established fundamental knowledge about them, and thus had little difficulty in answering the questions about them. Part of the questions seem to have been useless, and since teaching was not worked out well, it seems to have lacked in the plurality of mathematics culture and to have failed in representing the attractiveness of the history of mathematics. One may doubt that it was a lesson merely for introducing a history of mathematics. In the second lesson the teacher began to teach 'the right-angular triangle' in the period of Kan in China, and gave exercises on it. Since she took precautionary measures in choosing upon historically significant events, the students were very much impressed with them with good effects on them. The third lesson was what the students favored the most. They were strongly interested in the stories of historical events, on which they were able to concentrate. The excellent method of their solutions was by application of a 'similar triangle' they were learning at the moment, and so they were encouraged to reconsider their way of thinking about mathematics. They were exalted with great joy. They had strong incentives to aspire the ancient Greek mathematics civilization, enjoy to the full the beautiful sights of Samos Island, respect Euparinos, have great wonders about magical powers of geometry, etc. This introduction of the history of mathematics brought about very good effects on the students, which was beyond our imagination.

The questionnaire after the lessons showed that 84.4 % students were interested in the history of mathematics, and that 86.7 % students had a favorite view of the introduction of the history of English to mathematics education, and that 93.3 % students were anxious to know the history of mathematics and therefore placed a high value on its role. These evaluations supported most of the significances in the history of mathematics stated by Fauvel (1991).

2. Research activities

Ms. Wang was greatly moved by the students' responses to the history of mathematics, and decided to continue teaching it. Afterwards she moved to another junior high school, and made the following research plan of 'Introduction of the history of mathematics to a junior high school mathematics education.'

- Indication of numbers by letters
- Multiplication of or raising the numbers with the same base to the power
- Formulae of the difference of a square
- Concept of the real numbers
- Finding of an approximate value of a square root
- Application of congruent triangles

In what follows, I will show how Ms. Wang dealt with the history of mathematics in her mathematics teaching. She illustrated it with an example of congruent triangles.

First she begins to teach a story of 'Napoleon encounters with a river.'

She says: 'Class, I guess you have heard of Napoleon. This famous militarist commanded the whole army, fought many battles, and affected the world a great deal. Napoleon once proposed 'Let us have scholars in the army.' This proposal came to be known widely to the public with an implication that he respected scholars. Why did he so? Of course there is a reason for this. One day, in marching to the destination his party was prevented from going by the swiftly running river. They had to build a bridge over the river. But they had no materials for that. They had to look for them as quickly as possible. To make clear how many materials were needed for it they had to make a rough estimate of the width of the river. Since Napoleon, a great militarist, had no idea of how to estimate it, he was completely at a loss. Now, everyone, how can you do it for Napoleon?'

Ms. Wang made the following plan. She merely presented the problem. The students were free in their way of thinking. If they had difficulty in solving it, she would show them a hint of using congruent triangles. 'Application of the students' gained knowledge into actual use' in mathematics education is nothing more than solving a problem, and therefore the problem in the actual situation above is assumed to be difficult to tackle with. On this point the interview after the lesson offers a piece of evidence, which reveals the students' response 'I did not understand Ms. Wang's first question at all.'

Ms. Wang noticed the students' difficulty, and gave them a hint 'Why don't you use the knowledge of congruent triangles?'. They appreciated that hint, and worked out varieties of ways to solve the problem. Among them we had this way. A stands for the reference point on the opposite side of the river, and BD does the rod perpendicular to the earth. The eye measurement makes $\angle ABD = \angle CBD$, which makes $ABD \cong \triangle CBD$. In other words, the width of the river is counted as $AD = CD$. This is exactly the way adopted by Thales, ancient Greek mathematician. But the student's explanation about it was not easy to understand. This method was still uncertain to most students. Ms. Wang used a teaching tool for this, which was very helpful.

Ms. Wang here explained Thales' way of measurement. Thales (BC 6c) was an originator of ancient Greek geometry, and the first mathematician and philosopher in ancient Greece. When young he visited Egypt and measured the height of Pyramid based on the knowledge of congruent triangles. He stopped a war by predicting the solar eclipse. He was able to measure the distance between a ship and a shore by using the knowledge of congruent triangles and similar triangles.

As shown in Figure 9, Thales measured the width of a river by using a simple tool on a high hill (or cliff or lighthouse). We have a rod EF perpendicular to the earth. A nail A is fixed on the rod. We can turn around another rod by the nail A. Then we can fix it on the spot which we like. We turn around the small rod and fix it on a particular point of the opposite side of the river. Then we turn around the rod EF (with it being perpendicular to the earth), and fix it on the point C on the shore of the river. According to the theorem of an included angle between the sides (SAS), we have the following result $DC = DB$.

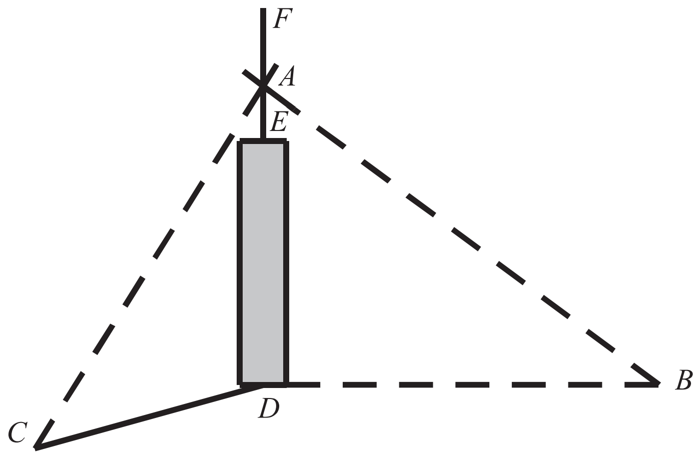


Figure9. Thales's way for measuring a distance

After teaching the method above, Ms. Wang told class to represent Thales's way.

'Now let us demonstrate Thales's way (see Figure 10).' The students used the two rods the teacher prepared for by using the knowledge of congruent triangles and measured the distance between the front blackboard and the back blackboard in the room.

'Is there any other way for it than that you used just now?'

Figure10. How the students demonstrate Thales's way

With the hints given to them, the students worked out one way after another. There are for instance: a way of using congruent triangles (Figures 11-13), a way of using right-angled triangles, a way of similar triangles (including the law of cosines). How the students' knowledge was expanded and their discussion was activated surpassed the teacher's imagination. Because teaching was strictly limited in time, Ms. Wang gave the students a homework which required them to collect the ways they showed in their discussion. She noticed an interesting fact there. Way 2 in Figure 12 was exactly an alternative way Thales, a mathematician, conjectured.

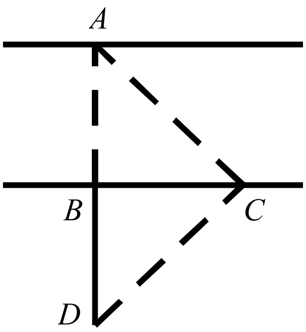


Figure11. Congruent way 1

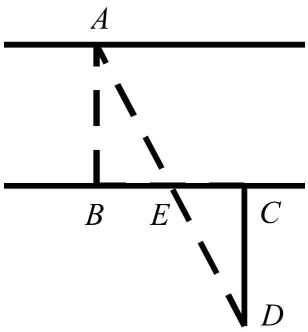


Figure12. Congruent way 2

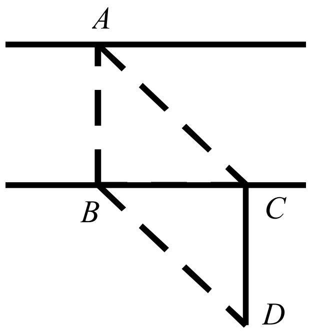


Figure13. Congruent way 3

In the end we have further applications of similar triangles.

Question 1. As shown in Figure 14, we have a z-shaped road *ABCD*. On the road *AB*∥ *CD* is a small stone chair *E* and *M* respectively on the road *AB* and *BC*, with *M* exactly in the middle of *BC*. Because a train stops on the road *AB*, one cannot measure directly the distance between *B* and *E*. Now is there any good way for measuring it?

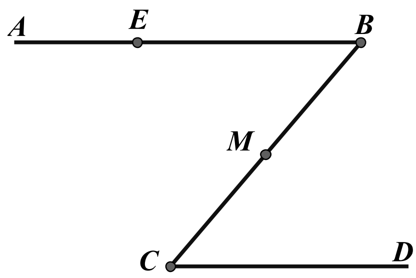


Figure14. Distance measurement in a park

Question2. An extra-curriculum activity group is thinking to do something significant by using the knowledge they learned. They happen to find a pond in the park near to their school. They are trying to measure the distance between the two ends of the pond.. Is there any good way for this?

As regards 'application of similar triangles,' Ms. Wang made an interview to some students (S) and teachers (T).

(1) Will you let me know what you have felt about the lesson of 'application of similar triangles'?

S1: I was attracted by Ms. Wang's unique way of talk, and strongly interested in it. I was impressed with solving a practical problem in our daily life, which I found was of great use. This is quite different from merely solving a problem in a textbook. We students had a chance to discuss it with one another and were greatly enlightened through it. The way of teaching mathematics was very new and we were able to gain not only mathematics knowledge but also other kinds of knowledge. I thought we discussed problems in our daily life and were not restricted only to theories in the lessons.

S2: I was interested in all talks in the lessons, which I think was helpful to heighten the efficiency of teaching. Whatsoever time may pass away, the story I heard will remain in my mind. In a supplementary private school I went to, I asked my school classmates about the similar question to what I had. They said they had no idea as to how to use the knowledge of similar triangles. At that time I felt as if I were a scholar, and felt very proud of it. When I taught other classmates the same knowledge, I felt very pleased with it. .

T1: Through this lesson I knew for the first time the letters important in the history of mathematics, and came to recognize that mathematics contributed a great deal to economy and culture. I am interested to do it

T2: I think this lesson is interesting both to a teacher and students. I found that the students were positively involved in the lesson since it was full of stimulation.

(2) This is a nice instance of the coalition between education and practice. However, the preparation for this lesson was surely laborious.

S3: Through this lesson I got to be very curious about daily events. I would like to take more interest in daily matters and expand my perspective. I was aware that daily matters were not necessarily difficult and insolvable. Once we got a way for solving them, I thought we could gain one way after another.

S4: Through this lesson I was able to increase the knowledge of the history of mathematics. I had had little knowledge of it. I think it was very important to know it. The historical knowledge of it may not be used in a test. In view of solving a practical problem, however, it is of great use. Furthermore it is impressive, encourages me to consider the problem more, and to know more about it. When Ms. Wang presented the question to us, I was very anxious to know the answer.

T3: I found the lesson was very useful. In an ordinary lesson there are very few chances to apply the learned theory to a practical problem. This lesson is useful in that it induces us to think more about how to put the learned knowledge to an actual use.

T4: I think this lesson is useful for students. They are encouraged to solve practical problems, build up a new awareness of mathematics, and have a favorable view of it.

(3) Is there any advice about this lesson?

S5: I hope teachers will give us this kind of lesson once a week. Or I hope they will start up a research question group, which will enable us to participate in it. I would like to attend as many lessons of this kind as possible.

T5: I hope for as many model lessons of this kind as possible so that we can share the benefits of them. We will get the students to be aware of the close relations between mathematics and daily events and of mathematical problems latent in daily lives, and encourage them to solve those practical problems by using the knowledge they learned. If every lesson of mathematics is done in this way, all students will surely love mathematics.

According to the interview to the teachers and students and the questionnaire to the students, we may safely say that Ms. Wang's lessons above are highly effective and thus are evaluated by everyone as a great success.

3. Ms. Wang's Change

Based on observations of the lessons and interviews to Ms. Wang, her colleague teachers, and educational researchers in the borough, I found that her two years' mathematics education with the use of the history of mathematics changed her. The details are as follows.

3.1. Formation of her own educational style

It is difficult for a junior high school mathematics teacher to build up his or her own educational style. Particularly it will be difficult for a ten-year experienced teacher to progress to a new direction. By introducing HPM, Ms. Wang has opened a new horizon of mathematics education, and is developing her own educational style.

Introducing her lesson by using the history of mathematics In her lesson on 'mean semisquared difference', Ms. Wang combined the historical letters (Choso, Diophantus) as well as the knowledge of history with the contents in a textbook. The integration the three things into one brought about a good effect.

Breaking through the difficult spot In the lesson on 'Indicating numbers by alphabets (letters) she got the students to consider 'shape and number by Pythagorus' and showed them 'simplicity based on the unity of shape and number and on alphabets (letters), and helped them to break through the difficult spot with ease.

Adopting the question of applying the history of mathematics as exercises In the lesson on 'application of similar triangles' she presented to the students the question in *the Nine Chapters on the Art of Mathematics* as an example, encouraged them to be aware of the significance of observation and thinking, and got them to feel that similar triangles are present here and there in our daily lives.

Applying the history of mathematics for putting together ideas and thoughts In the lesson on 'movement of figures,' Ms. Wang gave the students a ten-minute chance to appreciate the works of famous artists and architects both inside and outside China. These works are figures themselves of geometry which are concerned with the knowledge of parallel movement, turning movements, symmetrical movements of figures, etc.

Comparing a historical method with a method by a textbook In the lesson on 'getting an approximation of $\sqrt{2}$ by the way of approach,' Ms. Wang was able to expand the students' way of thinking by comparing the way of a textbook with the way of Heron, an ancient Greek mathmatician.

Reconstructing the birth of mathematics knowledge by means of the history of mathematics In the lesson on 'multiplication of or raising the numbers with the same base to the power,' Ms. Wang used *The Calculator of Sand* by Archimedes, and represented the story of the birth of raising the numbers with the same base to the power. She got the students to consider the way of *The Calculator of Sand* and acquire a number of calculations on raising the numbers with the same base to the power.

By introducing the history of mathematics to mathematics education, Ms. Wang brought 'a climate of culture' to her mathematics teachings and formed her own style of mathematics education. She was given a great honor with this achievement and became a leader of the mathematics education research group in school.

3.2. Deeper understanding of students' problem consciousness

According to the discipline of the origin of history, students' understanding of mathematical concepts is said to be similar to the development of mathematical concept. The similarity between these two gives us helpful directions for mathematical way of thinking. In other words, in order to predict the trouble spots students might encounter with, we have to investigate the history of mathematics. Through this history we are able to make a teaching plan which best suits students' problem awareness.

We will give you 'indicating numbers by letters' as an example. Before Ms. Wang's investigation of the history of mathematics she was restricted to the information from the reference books as shown in 'Letters show ways of calculation, formulae, unknown numbers in an equation, and variables show a rule of change.' But Ms. Wang studied the history of mathematics and understood that there were three stages of historical changes in 'letters show numbers.' That is, the first stage is that letters show unknown numbers, the second stage is that letters show any numbers, and the third is that letters shows variables. Students come to experience these three stages while studying algebra. Therefore the knowledge of the history of mathematics provides theoretical grounds for Ms. Wang's teaching plan.

F. Cajori, 1859-1930—a pioneer of HPM—, an American researcher of the history of mathematics, states: 'Most of the difficulties students were confronted with are solved through the deep considerations and discussions to which the scholars originating this research area have been devoted for many years' (Cajori, 1899). Further, D. F. Smith, 1800-1944 states: 'Those who trouble our society also trouble our children. Therefore conquering social difficulties suggest that children develop themselves to be able to conquer their confronted difficulties by using similar ways to conquer social difficulties.' M. Kline, 1908-1993, is in the same vein. He states: 'Those difficulties experienced by mathematicians will be obstacles in students' studying mathematics. Therefore the history of mathematics is a good guide to mathematics education' (Kline, 1966, 1970).

The deeper understanding Ms. Wang had of the history of mathematics, the deeper understanding she had of the errors the students had made and the difficulties they had experienced in studying mathematics. By researching into the history of mathematics she was encouraged to search for the causes for the above mentioned errors and difficulties.

3.3. Development of the competency to analyze teaching materials critically and distinguishingly

As her study progressed, Ms. Wang grew able to analyze her teaching materials in terms of HPM, and thus to develop her competency to treat it critically. The following example is Ms. Wang's treatment of distinguishing 'congruent triangles,' which is contained in her teaching materials.

A mathematics textbook contains four distinguishing methods for demonstration as follows: 'SAS Postulate: Two sides and the included angle of the triangle are congruent to the corresponding sides and the included angle of another triangle,' 'ASA: Two angles and the included side of one triangle are congruent to the corresponding two angles and included side of another triangle ,' 'AAS: Two angles and the non-included side of the triangle are congruent to the corresponding two angles and the non-included side of another triangle. (This is sometimes referred to as *AAcorrS* and then includes ASA above.),' and 'SSS: Each of the three sides of the triangle is congruent to the corresponding side of another triangle.' The demonstrations SAS and ASA are explained by Planning Method. But no demonstration is given for SSS, whose theorem is directly presented. The additional note she made refers to the point that the demonstration by SSS can be added, which is dependent on the contents she deals with later. I investigated Ms. Wang's teaching plan, and found the following description in her notes: 'The method by SSS is presented with no demonstration in the textbook, which has a description that that method is introduced at the first semester of the eighth grade. Further, the method for distinguishing the congruence of a right-angled triangle with the diagonal and neighboring sides being equal to each other is classified into the knowledge of a right-angled triangle. In the textbook there exist only demonstrations by the method for connecting two triangles and the method for proving the congruence of a right-angled triangle by using the knowledge of isosceles triangle with no further explanation of SSS. But the method for connecting two triangles and the method for demonstrating SSS by using the knowledge of isosceles triangles can be dealt with at the first semester of the seventh grade, not the eighth grade, just after the students' study of isosceles triangles in their textbook.

According to the history of mathematics, Philo (BC 1c), a mathematician in Byzantine Empire, worked out the following method: 'Let us move one of the two triangles, and lay one side of the triangle on the side of another triangle. We have the following result. The vertex of this side being regarded as an opposite side and its corresponding vertex of another triangle are both sides of the overlapping sides. Connect the two vertexes by a line, and you can get an isosceles triangle. The two vertical angles with overlapping sides being opposite sides are congruent. By using SAS, we can say that the triangles are congruent'. Given the knowledge of the history of mathematics, the knowledge of congruent triangles is systematized by students in a short learning period. Moreover, they can get not only the knowledge of mathematics, but also its origin and history. This shows a great contribution of the history of mathematics to the pedagogy of mathematics.

When Ms. Wang made a teaching plan of isosceles of triangles, she modified an example in the textbook. For instance, see SAS, ASA, and AAS. After teaching these three theorems, she taught the students how to demonstrate the isosceles triangles. She illustrated it with an example. In addition to the method of adding a line in the textbook, she introduced Euclid's method of demonstration. See Figure 15.

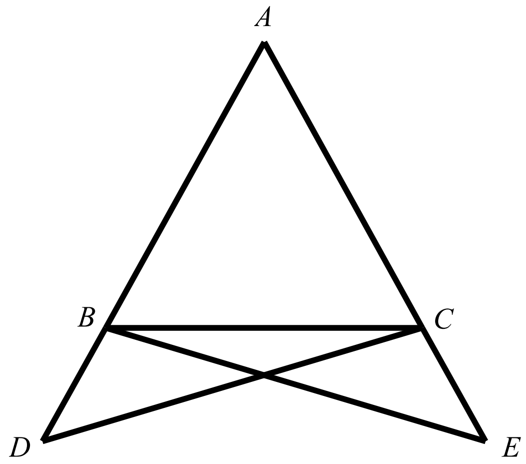


Figure15. Euclid's method for demonstrating the base angles of an isosceles triangle being the congruent

We have $\triangle ABC$ and $AB = AC$, then $\angle B = \angle C$.

Proof: Extend the line AB to the point D, and the line AC to the point E, and make $AD = AE$. You will have $\triangle ADC \cong \triangle AEB$ (S A S) .

Thus, $\angle E = \angle D$, $BE = CD$.

If so, $\triangle BCE \cong \triangle CBD$ (S A S) .

Thus, $\angle DBC = \angle ECB$.

Thus, $\angle ABC = \angle ACB$.

Because of the above mentioned knowledge of 'the opposite angles of the opposite sides being congruent,' students will naturally be able to demonstrate the theorem of SSS. Only with the history of mathematics, Ms. Wang was able to achieve her research question 'teachers should exploit and use creative teaching materials.'

3.4. Development of a teacher's competency for the pedagogical study of mathematics

Through her teaching activities for two years, Ms. Wang developed her competency for studying mathematics education. She contributed an article to *Mathematics Education*, and got the third prize in the section of Educational Papers in Shanghai city. She has contributed another paper, which is under review.

Ms. Wang is an only participant in the Speech Contest of junior high school teachers in the Seian Board of Shanghai city. In that context she was awarded with the first prize by her speech 'Activating students' way of thinking by introducing the history of mathematics.' See Figure 16.

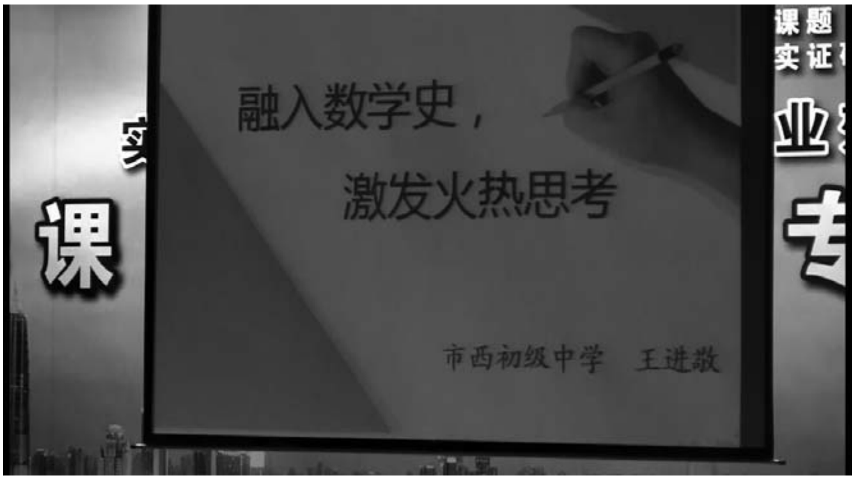


Figure16. Ms. Wang's speech on "Activating students' way of thinking by introducing the history of mathematics.'

In the fourth congress of the International Group of the History and Pedagogy of Mathematics held in East China Normal University in May, 2011, Ms. Wang presented a paper entitled 'Investigation into the activities of introducing the history of mathematics in junior high school mathematics education,' which was highly evaluated by the participants. By this paper presentation she was widely recognized in the pedagogical world of mathematics. Since then, she has regularly held research meetings together with scholars of mathematics education in East China Normal University and mathematics teachers having the same ambitions and visions, and discussed the issues concerned with the history of mathematics in junior high schools and the pedagogy of mathematics in terms of HPM. Now she is a member of the HPM group in Kanto University of Education.

At the very moment when Ms. Wang deals with the history of mathematics, she acutely feels lacking in its knowledge. Involved in the research into HPM, she is increasingly sensitive to her poverty of the training at the history of mathematics and devoted positively to the books and papers of the history of mathematics.

4. Conclusion

From the case study of Ms. Wang, we can conclude that HPM can contribute a great deal to the professional development of the competency of a junior high school mathematics teacher. My investigation, on the other hand, has shown that the introduction of the history of mathematics in a junior high school is 'highly evaluated,' but application of it is very difficult.' One of the reasons is that most teachers know a very little of the history of mathematics. Therefore in the instructional seminars for teachers, it will be necessary to strengthen the training of mathematics education based on the history of mathematics. The training should be designed in this way. It should not be a mere introduction of the history of mathematics, but organized to encourage teachers to apply it, and thus to be able to explore and uncover particular points which may be latent in or hidden behind the apparent knowledge of mathematics. If this is done successfully, mathematics teachers will be interested more in the history of mathematics. It is also conceivable that scholars of mathematics education should first exploit teaching plans and apply them to practical teachings in school and that mathematics teachers in school would be able to appreciate the effects of the history of mathematics in the pedagogy of mathematics. By so doing more mathematics teachers will endeavor themselves to enter the domains of HPM.

It is necessary to strengthen the link between university scholars and junior high school mathematics teachers so that HPM may be advanced from its theoretical stage to its practical. It is our sincere hope that scholars will research into the history of mathematics for pedagogical purpose, and that teachers in school will apply the scholars' findings to their practical lessons. Ms. Wang's case is a successful example of the coalition between research and practice.

Bibliography

1 Cajori, F. (1899). The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 7(5): 278-285

2 Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

3 Fauvel, J. & Maanen, J. van (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 91-92.

4 Kline, M. (1966). A proposal for the high school mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, **59** (4): 322-330.

5 Kline, M. (1970). Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, **77** (3): 264-282

6 Smith, D. E. (1900). *Teaching of Elementary Mathematics*. New York: The Macmillan Company, 42-43

代数的推論能力を育成するための授業研究の試み

－教師・生徒・道具の関係－

LEW Hee-Chan
韓国教員大学校

要約

本研究では、韓国の高等学校の生徒がグラフ機能を有する機器（以下、グラフィング機器）を用いて代数的問題を解決する過程で示した２つの正当化（経験的正当化と演繹的正当化）と、グラフィング機器が正当化の過程に及ぼす影響のタイプについての研究を行った。紙と鉛筆だけで解くことが難しい問題を解決する際には、グラフィング機器は経験的正当化を容易にすることが見いだされた。グラフィング機器は、操作的活動とその直後の実験や確認を通して数学的仮説をつくりだすことを促進するとともに、演繹的正当化にとっての重要な手がかりを提供した。本研究では、一人の協働者あるいは思考誘発者としての教師による指導や支援のもとでのグラフィング機器を用いた様々な操作的活動が、代数的問題を解決する際の重要な要素になり得ることが示された。

キーワード：　代数的推論能力、グラフィング機器、教師の役割

はじめに

正当化（justification）は、数学指導における重要なテーマの一つである。それ（正当化）は、厳密に展開された演繹的証明と、個人的な見方に基づく体系的な確信を含む心理的活動とを包含する一つの包括的な概念である（Lannin, 2005; Harel & Sowder, 1998)。韓国を含む多くの国のカリキュラムでは、生徒たちが自主的に帰納や演繹によって数学的事柄を正当化するような活動を強調している（MOE & HRD, 2007; NCTM, 2000; MOE, 1999; DOE, 1995; AES, 1994; NCTM, 1991)。数学教育における多くの研究者は、長い間、正当化の教育的意義を強調してきた（Lannin, 2005; Healy & Hoyles, 2000; Harel & Sowder, 1998; Knuth & Elliott, 1998; Hoyels, 1997; Simon & Blume, 1996; Battista & Clements, 1995)。しかしながら、先行研究では、多くの部分、幾何領域における証明に焦点を当てており（Knuth & Elliott, 1998; Harel & Sowder, 1998; Battista & Clements, 1995)、Healy & Hoyles (2000)のような少数の研究を除けば、代数領域における証明に関する研究はほとんど見当たらない。加えて、大部分の先行研究では、中学校や高等学校の生徒たちや初等・中等学校教員養成の学生たちによって示された正当化のタイプが取り扱われている（See Simon & Blume, 1996)。さらに、コンピュータのような指導機器が正当化の過程にいかなる影響を及ぼすかということ、正当化における教師の役割、複雑な問題を解決する上での正当化過程の関係についての研究が不足している。

このように研究の余地が大きいことを考慮して、本研究では、生徒たちがグラフィング機器を用いて代数的問題を解決する際に示す正当化の過程と、それが正当化過程に果たす役割を調査することを目的とする。本稿では、本研究によって見いだされた正当化過程の特徴について議論し、教室において正当化を取り扱う際に教師が果たすべき役割について

の一つのモデルを提案してみたい。

方法論

問題

伝統的な代数学習においては、生徒たちは自力での問題解決の過程できまり(regularities)に気付き、それらのきまりを等式やグラフで表現することが期待される。それゆえ、正当化の側面は十分に取り扱われない (NCTM, 2000)。代数学習におけるこうした欠点を補うための効果的な方法を見いだすために、本研究では一つの代数的問題 (図１) を選択した。この問題は、生徒たちがグラフィング機器を用いて操作的活動を行う際に示す繰り返し生起するきまり(the reoccurring regularity)の探究と、その正当化の過程に焦点を当てたものである。

問い：一次関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積 $h(x) = f(x)g(x)$ が $f(x)$、$g(x)$ と次の図のように接するような２つの一次関数 $f(x)$、$g(x)$ を求めよ。

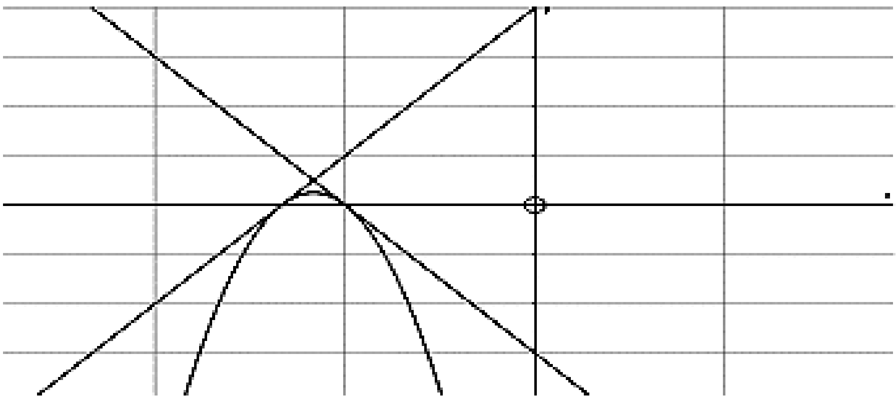


図１　生徒たちに与えられた代数的問題

方法

この実験授業は、学級担任からの紹介と保護者の同意を得て、個人的にボランティアとして参加を希望した文系の高等学校第２学年の生徒たちを対象にして行われた。学業成績が平均より上の２人の高校生が選ばれた。２週間のコース中に３回の実験授業が行われた。その２人の生徒たちには、コンピュータを利用して、話し合いや討論をしながら上記の問題を解決するよう要求した。まず、その生徒たちは紙と鉛筆を用いてその問題を解くように言われた。しかしながら、その生徒たちがそれを解くことができないとわかったとき、グラフィング機器を用いるように言われた。その２人の生徒たちは、この実験授業に先立って、特別なソフトウェアーについての指導を受け、それを２時間使用しただけだったが、関数の式を入力するとその関数のグラフを表示してくれる、どのようなタイプのソフトウェアーも使うことができた。

データ収集

筆者自身が、データ収集の過程で教師の役割を果たした。したがって、筆者はすべての

実験授業に参加し、観察した。加えて、その２人の生徒たちが必要とした場合には、ガイダンス（指導）も行った。データ収集のすべての過程で、必要だと判断した場合には筆者が、生徒たちのコミュニケーションの中のふと耳にした発話の内容を確認するために、構造化されていないインタビューも行った。１台のビデオカメラで指導と学習を記録し、コンピュータスクリーンにその生徒たちの活動を取り込み、生徒たちの発話は動画として取り込んだ。

結果

パラメーター（変数）を制御することによって一つの特別な解を見つける過程

その２人の生徒たちは、約 15 分間、紙と鉛筆でその問題を解決しようと試みた後、２つの関数の接点と傾きを含む４つのパラメーター（変数）が複雑に入り組んでいることに気付き、その問題を解決するのをあきらめた。コンピュータを利用しても良いと言われたとき、彼らは $f(x)$ の y 切片を 0 に固定し、他の変数に適当な値を入力し、そして、$f(x)=2x$、$g(x)=-2x+4$、$h(x)=2x(-2x+4)$ と入力した。そのグラフをかき、試行錯誤を繰り返した後に、彼らは $f(x)=x$ と $g(x)=-x+1$ という解にたどり着くまで、$f(x)$ と $g(x)$ の傾きと y 切片を変更していった。約 30 分間続いたこうした活動は、体系的ではないように見えたが、パラメーター（変数）を制御するという行為は、その後に続く活動にとって大変重要な一つの手がかりを与えた。

So-jung:（ $f(x)$ の y 切片を 0 に固定し、他の変数に適当な値を入力し、３つのグラフの形を観察した後）ああ、はっきりしない！
Soo-yeon: $f(x)$ をもっと簡単なものに変えてみよう。
So-jung:（ $f(x)=x$、$g(x)=-1/3x+1$、$h(x)=x(-1/3x+1)$ を入力する）傾きを大きくした方がいいかな？ −1/3 ではなく、−3/4 に？
So-jung, Soo-yeon:（$f(x)=x$、$g(x)=-3/4x+1$、$h(x)=x(-3/4x+1)$ と入力する）おお、あまりかわらない。
Soo-yeon: $g(x)$ の傾きを大きくしてみようか？
So-jung: 5/6？（$f(x)=x, g(x)=-5/6x+1$、$h(x)=x(-5/6x+1)$ と入力する）減少した。
Soo-yeon: 8/9？（$f(x)=x, g(x)=-8/9x+1$、$h(x)=x(-8/9x+1)$ と入力する）もっと減少した。
So-jung:（$f(x)=x$、$g(x)=-x+1$、$h(x)=x(-x+1)$ と入力した後）できた！

推測を立てて検証する過程における経験的正当化

その２人の生徒たちは最初、以前のセッションで学習したことを踏まえて、上記の問題を満たすためには、２つの一次関数 $f(x)$ と $g(x)$ は直角を作る必要があると考えた。すなわち、$f(x)=x$、$g(x)=-x+1$ において、$g(x)$ の傾きは－１で、$f(x)$ の傾きは１であると。この推測を検証するために、彼らはまず、２つの関数が直角を作るためには、それら２つの関数の傾きの積は－１でなければならないと考えた。こうした仮定のもとに、彼らは直角を作る関数の組として、$f(x)=2x$、$g(x)=-1/2x$,それから $f(x)=3x+1$、$g(x)=-1/3x$ と試しに入力した。彼らは、これは問題の条件を満たさないということを発見し、直角を作ることはあり得ないだろうという結論に達した。これは、経験的正当化（いくつかの例を確かめてみる）を

用いた第一の事例であった。これらの結果は数学的には正しかったが、その２人の生徒たちは、切片の値を変えると違いが生じうる可能性を考慮しなかった。その結果、彼らは、他の例で検証することなく、$f(x)=x$、$g(x)=-x+1$ 以外の直交する２つの関数は与えられた問題の解にはなり得ないと結論づけた。ここで注目すべきは、彼らはこうした事柄を数学的に証明しようとはしなかったということである。

この２人の生徒たちは、彼らの最初の推測を否定した後、$f(x)$と $g(x)$の傾きの絶対値は等しくて、それらの符号が反対であろうと推測した。彼らはこの新しい推測を検証し始めた。彼らが以前に行ったように、つまり何回か試行錯誤した後に、彼らは問題の条件を満たす $f(x)=2x$ と $g(x)=-2x+1$ という第二の解に到達した。その過程において、彼らは、$f(x)$と $g(x)$の傾きの絶対値を 2 に固定して、y 切片だけを変えていき、そのことは第二の解を生みだした。

Soo-yeon: じゃ、試してみよう。2 に変えてみよう。（$f(x)=2x$、$g(x)=2x+1/2$ と入力）うーん･･･ ほとんど変わらない。それでは、y 切片を徐々に大きくすべきかな？

So-jung: 1 にしてみよう。ああ、1 のときは前に確かめたね。

Soo-yeon: それでは、3/4？（$f(x)=2x$、$g(x)=-2x+3/4$、$h(x)=2x(-2x+3/4)$ と入力）

So-jung: 1 は使えないから、1 より大きい値を使おうか。

Soo-yeon: 1 より大きい？ 3/2？（ $f(x)=2x$、$g(x)=-2x+3/2$、$h(x)=2x(-2x+3/2)$ と入力）うまくいかないなあ･･･

Soo-yeon: 1 より小さいに違いない。

So-jung: 1 より小さい？でも、それは前にもう試して、うまくいかなかった。1 を試してみよう。

Soo-yeon: 1？（$f(x)=2x$ and $g(x)=-2x+1$ と入力）うまくいった。それだ！

数回試みた後、彼らは、y 切片が 0 と 1 に固定したとき、２組の解は傾きが異なっているということを見いだした。与えられた問題の要求を満たすためには、２つの一次関数 $f(x)$と $g(x)$の傾きの絶対値は等しくて、それらの符号が反対であればよいということを確認した。同時に彼らは、問題を満たす y 切片は 0 と 1 だけであると結論づけた。これは経験的正当化の顕著な事例である。筆者は彼らの教師をつとめていたので、反例を挙げようと思えばそうすることもできたが、彼らの自立的な思考を促すべきだと判断して、他の活動を示唆することはしなかった。

演繹的正当化

第３のセッションのはじめに、教師は 2、3 の例と反例を示唆することによって、第２のセッションの結果を２人の生徒たち思い出させせようとした。この過程を通して、彼らは $f(x)$ 、$g(x)$ 、$h(x)$の交点が x 軸上にあることを見いだした。

なぜ交点がいつも x 軸上にあるかについて熟考するように教師が生徒たちに促したとき、彼らは最初、その理由を考えることができなかった。しばらくして、$h(x)=f(x)g(x)$で、$f(x)=0$、$g(x)=0$ のとき $h(x)=0$ だから、交点は x 軸上に現れるということを理解した。教師が彼らに接点と交点の両方について考えるように促したので、彼らは、$f(x)$ 、$g(x)$ 、$h(x)$が x 軸上

で交わることから、$f(x)$と $g(x)$は $h(x)$の頂点に対して対称の位置にあると結論づけることもできた。彼らはさらに前に進んで、こうした確かなこと根拠として、問題の条件を満たすためには、$f(x)$と $g(x)$の傾きはそれぞれ a と–a でなければならないということを演繹的に正当化することができた。

Soo-yeon: しかし、・・・ 交点は必ず x 軸上に現れる・・・ なぜだろう？

So-jung: ああ、その通り・・・

Teacher: 交点は必ず x 軸上に現れる理由を考えてみよう。$h(x)$はどのように作られている？ $f(x)$と $g(x)$の値の積ではなかったかな？では、$h(x)$を因数分解すると何が得られる？

Soo-yeon, So-jung: $f(x)$と $g(x)$・・・

Teacher: では、二次方程式の解はどのようにして求める？

(約 10 分間が経過)

Soo-yeon:. えーと、それらは必ず x 軸上で出会うから・・・ むー・・・ よし、わかった・・・ $h(x)$を因数分解すると、$f(x)$と $g(x)$が得られるから・・・ $f(x)=0$, かつ $g(x)=0$ となる x を使うと $h(x)=0$ となる・・・ それは分かり切ったこと・・・

Teacher: 交点と接点について考えてごらん。

So-jung: それらは x 軸上で出会うことは確かだから・・・ ２つの交点があるときでもそれを大きくすれば x 軸上で出会う・・・ ああ、わかった・・・それらは x 軸上で出会う・・・ だから、それらは対称の位置になければならない・・・

Soo-yeon: ああ、そうか・・・ わかった・・・ もし $f(x)$ 、$h(x)$ 、$g(x)$が出会うなら $f(x)$と $g(x)$は対称・・・ だから、グラフの傾きは・・・

So-jung: ああ、x 軸からの・・・ これ($f(x)$)の傾きは $\tan\theta$, そしてこれ($g(x)$)の傾きは $\tan(\pi-\theta)$。うんー・・・ だから、もし $f(x)$が a なら、$g(x)$は–a だ・・・わかった。

Soo-yeon と So-jung は、傾きの符号が反対であるということを演繹的に正当化した。彼らは、第２のセッションでy切片がそれぞれ0と1であることを経験的に正当化しており、それら２つの見いだしたことを関係づけた。彼らは、$f(x)=ax$ と $g(x)=-ax+1$ が$h(x)=ax(-ax+1)$と接することを証明し始めた。

Soo-yeon: これは正しい？(教師に尋ねながら) これがいかに出会うかということだから・・・ 判別式を使って、・・・ 0。

Teacher: その通り・・・ これはどういうこと？ 判別式が 0 とは？・・・

Soo-yeon, So-jung: それらが出会うということ・・・

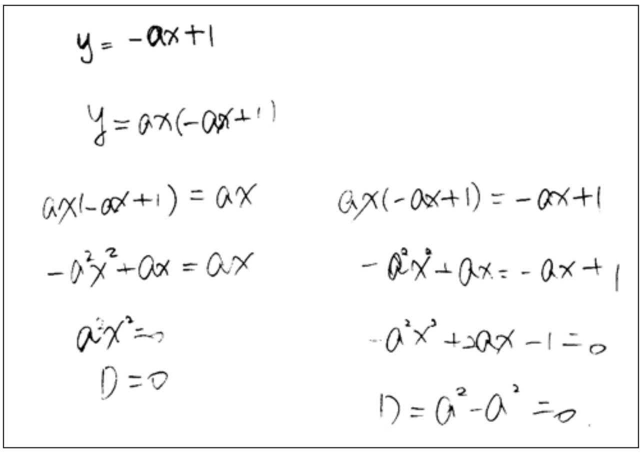


図２　Soo-yeon の演繹的正当化: y = ax, y = −ax + 1

Teacher: これまで私たちが見てきたように、傾きの符号が反対で、y 切片が 0 と 1 であれば、それらは出会う･･･　でも、私たちは傾きの値は符号が反対の数であるということは確かめたが、y 切片についてはいまだに何も証明できていないと、私は思う。*f(x)*と *g(x)*の y 切片についての証明をしようとするなら、私たちはどのような公式を用いたらいいだろう？

(少し話し合った後、２人の生徒たちは、*f(x)*の y 切片を a、*g(x)*の y 切片を b として、a と b の関係を検証するために、判別式を用いた。)

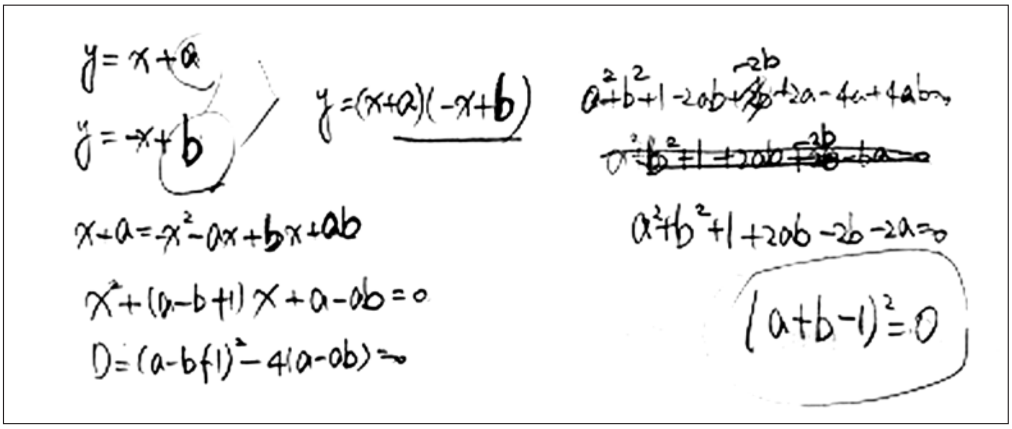


図３　Soo-yeon の演繹的正当化: y = x + a, y = −x + b

それによって、a+b−1=0 であるから、２つの関数の y 切片はそれぞれ 0 と 1 だけでなく、それらの和が 1 であるということを、２人の生徒たちは演繹的に導いた。彼らはまた、このことを *f(x)=x+4/5*、*g(x)=−x+1/5* と *f(x)=x+1/2*、*g(x)=−x+1/2* を入力することによって確かめようとした。これらのグラフが問題の与えられた条件を満たすということを見たとき、彼らは「２つの関数 *f(x)*と *g(x)*の傾きが符号の異なった等しい絶対値をもち、それらの y 切片の和が 1 のときに、条件が満たされる」という最終的な結論に到達した。

議論

本研究では、グラフィング機器を用いて代数的問題を解決する過程で、２つの正当化（経験的正当化と演繹的正当化）が示されるということが明らかにされている。これら２つのタイプの正当化はいずれもグラフィング機器によって刺激された。グラフを探究する際に、２人の生徒たちは変数を制御し、推測を立て、それを確証するという数学的実験を採用した。こうして、彼らは、推測を経験的に確かめ、グラフによって表現された視覚的手がかりを利用して、演繹的正当化へと進むことができるようになった。グラフィング機器を用いた様々な探究活動は、紙と鉛筆を用いる環境では為し得ない側面を可能とする。この点で、こうした活動は、生徒たちがより広い推論へと前進するための機会を開く。

本研究で同定された経験的正当化は、Simon & Blume (1996)に見られる第二のレベルのものと少し似ているが、本研究で同定された演繹的正当化は、Simon & Blume (1996)に見られる第三や第四のレベルのものとは異なっている。第三のレベルが「特別な例」や「包括的な例」を通した演繹的正当化を示しているということから判断すると、それは本研究で見いだされた演繹的正当化とは異なっている。なぜなら、本研究で見いだされた演繹的正当化は単にいくつかの特別な例を検証するということを超えていたからである。本研究で同定された演繹的正当化は、十分な演繹的レベルにまでは達しなかったという点で、第四の水準のそれとは異なっている。こうした本研究の結果は、数学指導に対する重要な示唆をもっている。第一に、本研究の結果は経験的正当化から演繹的正当化への移行の過程を示している。こうした移行は、グラフィング機器によって提供された視覚的手がかりによるといえるが、教師によって与えられた示唆もまた肝要な役割を果たしたということを指摘しておくことが重要である。２人の生徒たちは、彼らの推測を支持する少数の特別な例を与えることによって彼らの言っていることが真であると思い、なぜ彼らがそのような推測に至ったかを熟考しようとはしなかった。それゆえ、本研究は演繹的正当化における教師の指導上の判断が必要であるということを明らかにしている。このことは、演繹的正当化への移行において教師の役割が重要であるということを物語っている。

第二に、本研究は、正当化の過程における教師の役割の重要性を強調している。一人の協働者としての教師の役割は、グラフィング機器の助けと生徒たちが既に持っている数学的知識によってつくるアイデアの線引きを生徒たちがするのを助ける。さらに、数学的正当化における一人の思考誘発者としての教師の役割が同定された。一人の協働者あるいは思考誘発者としての教師の役割は経験的正当化の過程においては見られなかったが、経験的正当化から演繹的正当化への移行の過程では教師の役割が見られた。演繹的正当化に到達するために、グラフィング機器を用いることだけに頼ることは限界がある。教師は、生徒たちの活動を注意深く観察し、敏感に反応するとともに、生徒たちが経験的に正当化した事柄を数学的に説明し正当化するよう継続的に励ます必要がある。こうした結果は、教室環境で正当化を指導する際に、生徒たちに意味のある学習経験を提供するために教師が果たすべき役割に対する強い示唆をもっている。

参考文献

Australian Education Council (1994). Mathematics: A curriculum profile for Australian schools. Carton, VIC: Curriculum Corporation.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 258-292

Department of Education (1995). Mathematics in the national curriculum. Kondon, UK: HMSO.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in college mathematics education III(pp.234-283). Province, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof concepts in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

Hoyles, C. (1997). The curriclular shaping of students' approach to proof. For the Learning of Mathematics, 17(1), 7-16.

Knuth, E. & Elliott, R. (1998). Characterizing the nature of students' understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher*, 91 (8), 714-717.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Ministry of Education (1999). *Senior high school curriculum (in Japanese)*. Tokyo, Japan: MOE

Ministry of Education and Human Resources Development(2007). *Mathematics curriculum (in Korean)*. Seoul, Korea: MOE&HRD.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Simon, M. A., Blume, G. W. (1996). Justifications in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematics Behavior*, 15(1), 3-31.

Pilot Lesson Study to Improve Algebraic Reasoning Ability: The Relations among Teacher, Students and Tool

LEW Hee-Chan
Korea National University of Education

This study investigated two types of justification, namely empirical and deductive displayed by Korean high school students in the process of solving algebraic problems using graphing technology and the type of influence graphing technology has on the justification process. Graphing technology was found to ease empirical justification when solving problems in which solutions are difficult to obtain purely by means of pencil and paper. Graphing technology facilitated mathematical assumption through operational activities that were followed by immediate experimentation and corroboration and also provided a significant clue for deductive justification. The study showed that operational activities using graphing technology guided and supported by the teacher as a collaborator or thought-provoker could be important elements in solving algebraic problems.
Key words: Algebraic Reasoning ability, Graphing technology, Teachers' role

Introduction

Justification is an important theme in mathematics instruction. It is a comprehensive concept that encompasses rigidly developed deductive proofs and a psychological activity that involves systematic persuasion based on one's personal point of view (Lannin, 2005; Harel & Sowder, 1998). The curricula of many countries including that of Korea emphasize activities that allow students to independently justify mathematical facts through induction and deduction (MOE & HRD, 2007; NCTM, 2000; MOE, 1999; DOE, 1995; AES, 1994; NCTM, 1991). Many researchers in mathematics education have underscored the educational meaning of justification for a long time (Lannin, 2005; Healy & Hoyles, 2000; Harel & Sowder, 1998; Knuth & Elliott, 1998; Hoyels, 1997; Simon & Blume, 1996; Battista & Clements, 1995). However, preceding research, for the most part, focused on proofs in the realm of geometry (Knuth & Elliott, 1998; Harel & Sowder, 1998; Battista & Clements, 1995), and with the exclusion of just a few like Healy & Hoyles (2000), research on proofs in algebra is hard to find. In addition, most prior research dealt with the types of justification showed by middle and high school students or pre-service elementary and middle school teachers (See Simon & Blume, 1996). Moreover, there is inadequate research on how instructional media such as computers influence the justification process, the role a teacher plays in justification, and the relation the process of justification has in solving complicated problems.

Considering this widely unexplored area, this research aims to explore the justification process displayed by students when solving algebraic problems using graphing technology and the role it plays in the justification process. The paper will discuss the justification process features identified by this study, and set forth a model for the role teachers ought to play when addressing justification in the classroom.

Methodology

Problem

In traditional algebraic learning, students are expected to identify regularities in the problem solving process on their own and express such regularities as equations and graphs; consequently, the aspects of justification are not fully addressed (NCTM, 2000). In an effort to find an effective methodology to compensate such shortcomings in algebraic learning, the present research selected an algebraic problem (Figure 1) that focused on exploration of the reoccurring regularity that students exhibit as they carry out operational activities involving graphic technology and the justification process.

The problem is : Find two linear functions *f(x)* and *g(x)* such that the product *h(x) = f(x) g(x)* intercepts with *f(x)* and *g(x)* as shown below.

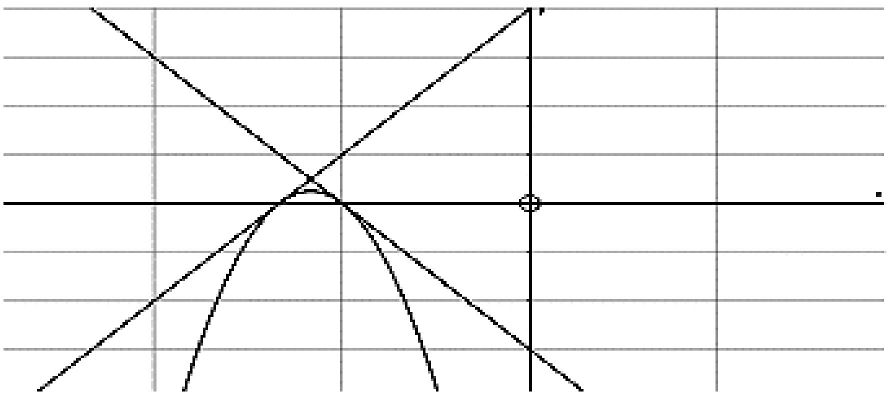


Figure1. The algebraic problem given to students

Procedure

This experiment was conducted with second year high school students in the humanities track, who personally volunteered to participate in the study, had attained a reference from their homeroom teacher and received the consent of their parents. Two students who were above average in terms of academic achievement were selected to participate. Over the course of two weeks, three experiments were conducted. The students were asked to solve problems with the aid of a computer and continuous communication and discussion. At first, the students were asked to solve the problems with pencil and paper, but when it became evident that the students could not attain a solution, they were asked to use graphing technology. Although the students were trained on particular software and used the software two hours prior to the experiment, students could use any type of software that produced resultant graphs once functional formulae were input.

Data Collection

The researcher played the role of teacher in the data collection process and therefore participated in and observed the entire experiment process. In addition, the researcher also provided guidance for the students whenever they needed help. Throughout the course of data collection, whenever deemed necessary, the researcher also carried out non-structured interviews with the students in order to clarify utterances overheard in their communications. A video camera was used to record instruction and learning, computer screens captured students' activities, and utterances were captured as moving pictures.

Results

The Process of Discovering a Particular Solution by Controlling Parameters

After trying to solve a problem in the pencil and paper environment for approximately 15 minutes, students gave up when they realized that the 4 parameters including the two functions' intercepts and slopes were convolutedly intertwined. When it was suggested that they make use of a computer, they fixed the intercept of $f(x)$ to 0, input random values into the other variables, and input $f(x)=2x$, $g(x)=-2x+4$, and $h(x)=2x(-2x+4)$. After drawing a graph and several trials and errors, the students altered the slope and intercept of $f(x)$ and $g(x)$ until they arrived at the solutions of $f(x)=x$ and $g(x)=-x+1$. Although the activity, which lasted for approximately 30 minutes, might seem non-systematic, the act of controlling parameters provided a significant clue for the activities that followed.

So-jung: (After setting the intercept of $f(x)$ to 0, randomly changing the remaining parameters and observing the shape of the three graphs) Ah, this is so vague.

Soo-yeon: Let's try changing $f(x)$ to a simpler one.

So-jung: (Inputs $f(x)=x$, $g(x)=-1/3x+1$, and $h(x)=x(-1/3x+1)$ Should we increase the slope? Instead of $-1/3$, $-3/4$?

So-jung, Soo-yeon: (Input $f(x)=x$, $g(x)=-3/4x+1$, and $h(x)=x(-3/4x+1)$) Oh… it's similar.

Soo-yeon: Shall we try increasing the slope of $g(x)$?

So-jung: $5/6$? (Inputs $f(x)=x$, $g(x)=-5/6x+1$, and $h(x)=x(-5/6x+1)$) It decreased.

Soo-yeon: 8/9? (Inputs $f(x)=x$, $g(x)=-8/9x+1$, and $h(x)=x(-8/9x+1)$) It decreased even more.

So-jung: (After inputting $f(x)=x$, $g(x)= -x+1$, and $h(x)=x(-x+1)$) We got it.

Empirical Justification in the Process of Establishing and Examining Hypotheses

The students first thought that the two linear functions $f(x)$ and $g(x)$ needed to form a right angle in order to satisfy the problem based on what they had learned in the previous session; the slope of $g(x)$ is -1 and the slope of $f(x)$ is 1 in the functions $f(x)=x$, and $g(x)=-x+1$. In order to examine their hypothesis, the students first thought that for the two functions to form a right angle the product of the slopes of the two functions should be -1. Based on such an assumption, the students tried inputting $f(x)=2x$, and $g(x)=-1/2\ x$, and then $f(x)=3x+1$ and $g(x)=-1/3\ x$, which are combination of functions that form right angles. They discovered that this did not coincide with the conditions required in the problem and thus came to the conclusion that formation of a right angle would not be possible. This was the first instance of the use of empirical justification - confirming examples. While the results were mathematically correct, the students did not consider the possibility that there might be a difference once the intercept value changed. As a result, they concluded that a solution was impossible with the two functions set perpendicularly unless $f(x)=x$ and $g(x)=-x+1$ after examination of few examples. Note worthy is the fact that the students did not attempt to mathematically prove such facts.

After rejecting their first hypothesis, the students believed the absolute value of $f(x)$ and $g(x)$ might be the same value but with opposing symbols. The students started to examine this new hypothesis. As they had done previously, i.e. after several trials and errors, they reached to a second solution of $f(x)=2x$ and $g(x)=-2x+1$, which satisfied the conditions given in the problem. In the process, they set the slope of $f(x)$ and $g(x)$ to 2 and changed only the intercept value, which produced the desired solution.

Soo-yeon: OK..Let's try it. Let's try changing it to 2. (Inputs $f(x)=2x$ and $g(x)=-2x+1/2$). Hmm... It's roughly similar. Then should we try gradually increasing the y intercept? It is kind of hovers.

So-jung: Let's try 1. Oh, come to think of it we already tried 1.

Soo-yeon: Then 3/4? (Inputs $f(x)=2x$, $g(x)=-2x+3/4$, and $h(x)=2x(-2x+3/4)$.)

So-jung: Since we can't use 1, let's try using a value that's bigger than 1.

Soo-yeon: Bigger than 1? 3/2? (Inputs $f(x)=2x$, $g(x)=-2x+3/2$, and $h(x)=2x(-2x+3/2)$) It's not working...

Soo-yeon: It has to be smaller than 1.

So-jung: Smaller than 1? But we already tried doing that and it didn't work. Then try 1.

Soo-yeon: 1? (Inputs $f(x)=2x$ and $g(x)=-2x+1$.) That's it.

After several attempts, the students found that the two solutions differed in slope when the y intercepts were set at both 0 and 1. In order to meet the requirements of the problem they ascertained that the absolute value of the slopes of the two linear functions $f(x)$ and $g(x)$ are the same while the actual values differed in symbols. They also concluded that only the y intercepts, to satisfy the problem, should be 0 and 1. This is a clear example of empirical justification. The researcher, who served as the teacher, could have raised a counter example but did not suggest alternative activities under the judgment that independent thinking needed to be encouraged.

Deductive Justification

At the beginning of the third session, the teacher tried to remind the students of the results in the second session by suggesting a few examples and counter examples. Through this process, the students discover that the intersection points of $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$ always appear on the x axis even when they do not intersect.

When the teacher encouraged the students to ponder why the intersection point is always set on the x axis, at first the students were unable to think of a reason. After a while, the students understood that because $h(x)=f(x)g(x)$, $h(x)=0$ when $f(x)=0$, $g(x)=0$, therefore the intersection point appears on the x axis. The students were also able to conclude that for $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$ to meet at the x axis, $f(x)$ and $g(x)$ should be symmetrically positioned around the vertex of $h(x)$ because the teacher encouraged the students to think of both the point of contact and the intersection point. The students were able to go ahead and deductively justify that, based on such certainty, the slopes of $f(x)$ and $g(x)$ should be a and –a for the conditions of the problem to be satisfied.

Soo-yeon: But... the intersection point always appears on the x axis... Why is that?

So-jung: Oh you're right...

Teacher: Let's try thinking of the reason why the intersection point always appears on the x axis. How is $h(x)$ made? Isn't it the multiplied value of $f(x)$ and $g(x)$? Then what do we get when we factorize $h(x)$?

Soo-yeon, So-jung: $f(x)$ and $g(x)$...

Teacher: Then how do we get the root in a quadratic equation?

(Approximately 10 minutes passes.)

Soo-yeon:.Well... since they always meet at the x axis...hmm......Ok, I get it... When we factorize $h(x)$ we get $f(x)$ and $g(x)$ so ... $h(x)=0$ when we use an x that makes $f(x)=0$, and $g(x)=0$ ...That's quite evident....

Teacher: Think about the intersection point and point of contact.

So-jung: Since it is certain that they meet at the x axis..... Even if there are two intersection points if we eventually increase it then they meet at the x axis…Now I see…they meet at the x axis…so they should be positioned symmetrically...

Soo-yeon: Oh… ok....I see...If $f(x)$, $h(x)$, and $g(x)$ should meet then $f(x)$ and $g(x)$ should be symmetrical… and so the slope in the graph .....

So-jung: Oh....from the x axis.....Then the slope of this ($f(x)$) is $\tan\theta$, and this ($g(x)$) is $\tan(\pi-\theta)$. Hmm... So if $f(x)$ is a then $g(x)$ is −a...I get it..

Soo-yeon and So-jung deductively justified that the symbols of the slopes are opposite. They empirically justified that the intercepts are 0 and 1, respectively, in the second session and connect these two findings. They started proving that *f(x)=ax* and *g(x)=−ax+1* intersect with *h(x)=ax(−ax+1)*.

Soo-yeon: Is this right? (asking the teacher) Since this is how they should meet.....We used the discriminant and we got…0.
Teacher: That's right... What does this mean? That the discriminant is 0?...
Soo-yeon, So-jung: They meet..

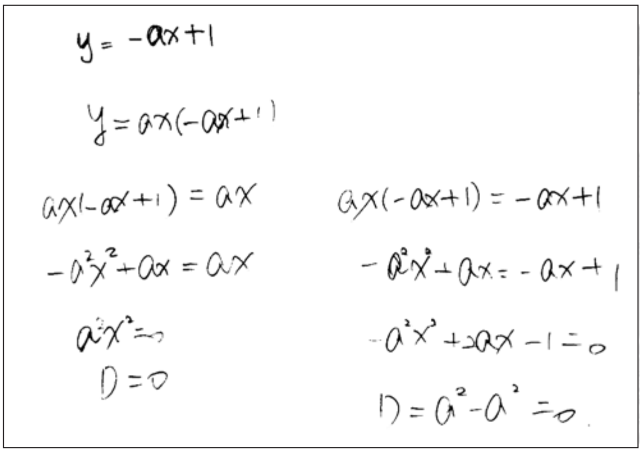


Figure2. Soo-yeon's deductive justification: y=ax, y=−ax+1

Teacher: As we have seen so far they will meet as long as the symbols of the slopes are opposite and the y intercepts are 0 and 1... But it seems to me that while we've identified that the slopes are numbers of which symbols are opposite, we haven't been able to prove anything about the intercept yet. What kind of formula should we use if we would like to make a proof about the intercepts of *f(x)* and *g(x)*?
(After some discussion, the two students put the intercept of *f(x)* as a and the intercept of *g(x)* as b and then used the discriminant to examine the relationship between a and b.)

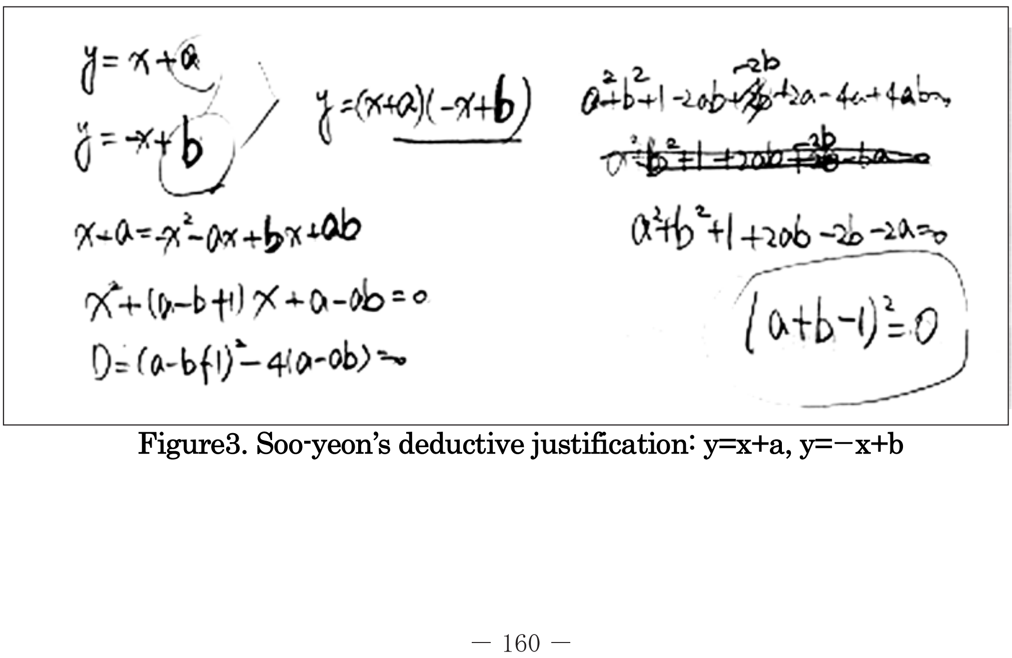


Figure3. Soo-yeon's deductive justification: y=x+a, y=−x+b

Consequently, the students deductively identified that since $a+b-1=0$, the intercepts of the two functions are not just respectively 0 and 1, but that their added value is 1. The students also tried confirming this by inputting $f(x)=x+4/5$, $g(x)=-x+1/5$ and $f(x)=x+1/2$, $g(x)=-x+1/2$. When the graph was found to satisfy the given conditions, the students arrived at the final conclusion that the conditions would be satisfied when the slopes of the two functions $f(x)$ and $g(x)$ have different symbols with the same absolute value and that the intercepts are added to be 1.

Discussion

The results of the present research show that two types of justification, namely empirical and deductive justification are displayed in the process of solving algebraic problems using graphing technology. These two types of justification were both stimulated by virtue of graphing technology. In exploring graphs, the students employed mathematical experiments by controlling variables, setting a hypothesis and corroborating the hypothesis. As such the students were able to empirically confirm the hypothesis and move on to deductive justification using the visual clues represented by the graphs. Exploratory activities using technology make accessible aspects that are not possible in a pencil and paper environment. In this respect, such activities open up opportunities for students to advance to broader reasoning.

The empirical justification identified in the present research is slightly similar to the second level found in Simon & Blume (1996), but the deductive justification in this research differs from the third and fourth level in the same study. In view of the fact that the third level exhibited deductive justification through ‘particular examples’ or ‘comprehensive examples’, it differs from the deductive justification found in this research because it went beyond simply examining specific examples. The deductive justification found in this research is also different with the fourth level in that it did not reach a fully deductive level. Such results have significant implications for mathematics instruction. First, the results show a process of transfer from empirical justification to deductive justification. Such a transfer can be attributed to the visual clues provided by the technology, but it is also important to point out that the suggestions given by the teacher also played an imperative role. The students were certain that their arguments were true by giving a few specific examples that supported their hypothesis, but did not go on to ponder why they came to such a judgment. Therefore the present research sheds light on the need for the teacher’s instructional judgment in deductive justification. This candidly shows the significance of the teacher’s role in the transfer to deductive justification.

Second, the research emphasizes the role of the teacher in the justification process. The role of the teacher as a collaborator helps students draw a line between the ideas formed with the help of graphing technology and the students’ previous mathematical knowledge. Moreover, the role of the teacher as a thought-provoker in mathematical justification was identified. Although the teacher's role as a collaborator or thought-provoker was not found in the empirical justification process, but it was found in the process of transfer from empirical to deductive justification. There are limitations to solely relying on the use of graphic technology to reach deductive justification. The teacher needs to carefully observe and sensitively respond to the students' activities and continuously encourage the students to mathematically explain and justify what they have empirically justified. Such results have strong implications for the role teachers should play in order to provide a meaningful learning experience for students in teaching justification in a classroom environment.

References

Australian Education Council (1994). Mathematics: A curriculum profile for Australian schools. Carton, VIC: Curriculum Corporation.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 258-292

Department of Education (1995). Mathematics in the national curriculum. Kondon, UK: HMSO.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in college mathematics education III(pp.234-283). Province, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof concepts in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approach to proof. For the Learning of Mathematics, 17(1), 7-16.

Knuth, E. & Elliott, R. (1998). Characterizing the nature of students' understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher*, 91 (8), 714-717.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Ministry of Education (1999). *Senior high school curriculum (in Japanese)*. Tokyo, Japan: MOE

Ministry of Education and Human Resources Development(2007). *Mathematics curriculum (in Korean)*. Seoul, Korea: MOE&HRD.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Simon, M. A., Blume, G. W. (1996). Justifications in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematics Behaviour*, 15(1), 3-31.

授業研究を通して数学教師の専門的成長を高める
－シンガポールの事例研究－

Yeap Ban Har，マーシャル・キャベンディッシュ研究所
Peggy Foo，マーシャル・キャベンディッシュ研究所
Soh Poh Suan，クレメンティタウン中等学校

要約

教師の質というものは、優れた教育制度の重大な成功要因のひとつとされてきた。この研究の主な目的は、授業研究がシンガポールの教師たちの専門的成長をどう深めることができるかということを調べることである。その結果をある中学校の事例研究から得たい。それについて、教材に関する知識、指導、その他同僚間の同僚性の認識などの観点から議論したい。学校のリーダーまたは学校の政策立案者はこれらの調査結果が示すことを効果的な土台作りとして、つまり長い目で見れば教師たちの総体的な専門知識を引き上げる教師たちによる専門的成長の基盤として授業研究の選択と実施の検討に役立てることができる。

はじめに

過去 50 年間シンガポールの教育制度は、その国の発展の諸段階で独立国家の必要にこたえるために絶えず進化してきた。一連の改革を通して、たとえば TIMSS と PISA のような国際調査でも、特に数学と理科において高成績を上げることのできる強固な教育制度の築かれることが立証された。McKinsey & Company(2007)による国際調査によってシンガポールの教育制度は世界で最も優れた成果を上げている教育制度の 1 つであると同定された。そして、「教育制度の質は、その教師の質を上回ることができない」と結ばれ、彼らの研究は、教師の質と指導の質こそ、わたしたちの教育制度がゆるぎなく高い達成を保つ 3 大要因の 2 つであるとした。また、国立人材委員会（NSDC）（2009 年 2 月）による最近の調査も、わたしたちの教育制度が高水準にあることを認め、教師たちの専門的成長に関してシンガポール文部省（MOE）によって整えられた効果的戦略を高く評価している。

数学教育

シンガポールの数学教育はそのカリキュラムの中心に数学的な問題解決を位置づけ、これに重点的に取り組んでいる。このカリキュラムは 2007 年に改訂され、その後も継続して数学の学習指導における概念の理解、スキルの熟達、そして思考力を重視している。教師たちは，生徒たちに、数学を発見し、数学について推論し、数学についてコミュニケーションする多くの機会を提供するよう求められた。生徒たちは、自分たちが可能性を探り、つながりを作ることができるような議論や活動にたずさわるよう励まされた。

21 世紀の教育

シンガポールは数学教育において高い評価を得てきたが、急速に変化する世界の状況をまえに、制度の強さについて、そして 21 世紀の学びに関わる諸関心事について検討する

喫緊の必要性がある。多くの国々と同じように、シンガポールは生徒たちに 21 世紀における生活と仕事の道を開いてやる課題に直面している。世界的な動向に応えて、MOE は新たなひとまとまりのコンピテンシーと理想的な生徒の姿を明確に示すために 21 世紀のフレームワークを開発した。そのキーコンピテンシーは、１）市民リテラシー：グローバルな認識と異文化コミュニケーションスキル、２）批判的・独創的思考、３）情報・コミュニケーションスキル、である。理想的な生徒の姿とは自信をもつ人、自律した学習者、積極的に力を貸す者、そして関心のある市民である（NIE TE 21, 2010）。

上述のコンピテンシーを成長させ、望ましい成果を出すために、教師たちは教室における自らの指導アプローチを変える必要がある。MOE は教師たちがその変化のために重要であると認識し、変化を可能にする教師たちの専門的成長を高めることに尽力した。

専門的学習コミュニティ

2008 年、MOE は各学校を専門的学習コミュニティ（PLC）に発展させることによって教師たちの専門的成長を高める全国的な取り組みを発表した。

PLC の中心的な目的は指導実践の改善にあり、それは生徒たちの学習成績の改善につながっている。各 PLC は 3 つの大きな理想を受け入れることになる。すなわち（DuFour & Eaker, 1998）、

１）生徒たちの学びに焦点を当てる
２）協働的文化に焦点を当てる
３）データによる成果に焦点を当てる

である。PLC のなかで、教師たちはいくつかの学習チームにグループ化された。それぞれのチームは教室における指導法を改善することに関する 4 つの重要な問いによって方向づけられた。

１．私たちが生徒たちに学んでほしいと期待することは何か。
２．生徒たちがそれを学んだということを、どうやって私たちは知るか。
３．生徒たちがそれを学んでいないのなら、どうやって私たちはどう応えるのか。
４．生徒たちがそれをすでに知っているのなら、私たちはどう応えるのか。

- www.allthingsplc.or

PLC のこうした方針のもと、諸学校は 3 つの大きな理想と 4 つの重要な問いを受け入れるために、任意の専門的成長ツールないしプラットホームを選択するよう促された。

授業研究

専門的成長ツールのひとつは授業研究である。特に、日本の授業研究という方法に注目した。それは、日本の生徒たちが高いレベルの成績を示すからであり、また、日本の授業研究が、教えることは複雑で文化的な活動であるという考えに軸を置いているからである（Stigler &Hiebert, 1999）。

授業研究は、研究授業とも言われるが、日本語のケンキュウジュギョウとして知られている（Lewis, 2002)。ケンキュウとは、研究（research）ないし研究（study）を意味し、ジュギョウとは授業（lesson(s)）ないし指導を意味している。ケンキュウジュギョウは日本の数学教育と理科教育において、伝えることとしての教えるということから理解のために教えるということへの転換とみられ（Lewis, 2002)、日本の教育者の重んじるものである。その考え方はシンプルである。教師たちは授業研究プロセスを通じてひとつのグループで一緒に活動し、授業の計画、観察、反省を協働して行うのである。しかしながら、効果的な授業研究を開発し実行することは、作用しているいくつかの要因があるため、複雑なものである可能性がある（Stigler &Hiebert, 1999)。

授業研究プロセスは、いくつかの異なる段階から構成されている。すなわち、目標の設定、研究授業の計画、授業実践と評価、そして学習のまとめである。

目標設定のために、教師たちのグループは研究テーマを決める。たとえば、その研究テーマはある学習領域における生徒たちの弱点であったり、あるいは教育者が教えることに困難を覚えるトピックであったりする。

設定された目標に基づいて、そのチームはひとつの授業を開発する。それが研究授業と呼ばれるものである。この授業の目標は、教師たちが自分自身の経験を吟味することから始まり、できるだけ資料を調査して有効な授業計画を検討することに時間を費やしながら設定されるのである（Lewis, 2002)。よく考えられた授業計画のデザインは、効果的な授業の最も重要な点であり、能力のある教師の専門的実践に共通な点である（Cowan, 2006)。

授業計画が立てられると、ひとりの教師が教えることになる。チームの他のメンバーたちはその授業を観察するために授業に出席してメモをとり、生徒が何を学びどう思考したかということについて、証拠を集める。それから授業研究グループのみんなで議論し、その授業に関する評価と反省を行う。こうしてはじめの授業計画は修正されるのである。

その修正された授業計画によって、別のグループの生徒たちに教えられる。授業後にはその授業計画の評価、反省、活動のための協議が行われ、こうした授業研究サイクルは改善された授業計画を用いて新たな教室で繰り返し行われることになる。（Appel, Leong, Mangan, Mitchell & Stepnaek, 2007）

最後に、目的を共有するための学習のまとめがある。これは、教師たちの反省とともに、学習指導についての発見事項のまとめと共有として、授業研究プロセスの重要な部分であるとみられている。このようにして得られた知識を用いて、教師たちは新しい授業を計画し実施していくことができるのである（Lewis, 2002)。

研究課題

本研究における研究課題は「中学校数学教師の専門的成長に及ぼす授業研究の影響とは何か」というものである。

方法

参加者

参加者はある１つの中学校における学習チームの７人の数学教師である。その教師たち

のプロフィールと彼らの役割は下の表１の通りである。そのうち２人の教師は（３つのサイクルにおける）中学校１年生数学の３つのクラスの研究担当教師であった。112 人の中学校第１学年特進コースの生徒（13 歳）が関わった。

表１　参加した教師のプロフィール

教師	プロフィール（数学指導の経験年数）	研究授業中の役割（クラスの生徒数 N は括弧内に示した）
A	経験を積んだ教師（8 年）	授業者：Class 1 (N = 39) 観察者：Class 3
B	経験を積んだ教師（32 年）	授業者：Class 2 (N = 36) 授業者：Class 3 (N = 37) 観察者：Class 1
C	新任の教師（2 年 6 ヶ月）	観察者：Class 2 と 3
D	経験を積んだ教師（11 年）	観察者：Class 2
E	経験を積んだ教師（6 年 6 ヶ月）	観察者：Class 2 と 3
F	新任の教師（1 年）	観察者：Class 2 と 3
G	新任の教師（6 ヶ月）	観察者：Class 2 と 3

このチームは経験を積んだ教師 4 人と新任（経験が 3 年以下）の教師 3 人とで構成されていた。

手順

ステージ１：研究テーマを決める

授業研究サイクルのはじまりにおいて、この学習チームは、その学校の使命、展望、数学カリキュラムの目標と 21 世紀のコンピテンシーフレームワークにもとづく研究テーマを決めるために集まった。その議論を通して、その教師たちは研究テーマを「生徒たちを自律的・協働的学習者になるよう成長させること」と決定した。このテーマは学習チームに彼らが自分たちの授業研究サイクルの中心となる議論とその方向性をもたらした。

ステージ２：授業を計画する

授業を計画する段階において、そのチームは、ポリアの問題解決のためのモデルを用いて、方程式の立式と解決を手助けするためにグループ活動を用いることを探った。研究授業に先立って、生徒たちにポリアの 4 段階モデルを紹介するために二つの授業がおこなわれた（付録１）。

ステージ３：研究授業を実施する

研究授業の目的は次の二つであった：

(a) 代数の文章題を解くためにポリアのモデルを適用する

(b) 文章題を解くために、一元一次方程式を立式するというストラテジーを用いる

45 分間の研究授業は大きく次の４段階に分けられた。それは、導入、グループ活動、プレゼンテーション、まとめの段階である。

生徒たちは前もって４人一組のグループに分けられ、グループのメンバー一人一人の役割が明確に伝えられた（すなわち、リーダー兼管理人、書記兼チェック係、発表者兼評価者、監督兼タイムキーパーである）。

導入の段階で、生徒たちに授業の目標について説明して、グループのメンバーの役割をあらためて示すのに授業の最初の5分が用いられた。それぞれのグループで生徒たちには、１つの問題を解決することが課された。それは長方形の土地が小さな正方形の区画に分割されたというシナリオだった。生徒たちはそれぞれの正方形の長さを見つけ、x を使って y を表し、それに関する問いを解くために方程式をつくるよう求められた（付録 2 参照）。グループ活動の段階のあいだ、教師は生徒らの進みぐあいをチェックし、質問を受け付け、感情面でのサポートをするためにグループ間を歩き回った。発表の段階で、いくつかのグループの生徒たちは、自分たちのグループの解き方をそのクラスのみんなに発表するよう求められた。まとめの段階では、教師はその解き方を説明し、そして、その授業の学習成果をまとめた。

研究授業は学習チームのメンバーによって観察された。観察者たちには自律的・協働的学習に関する生徒の学習成果と学習行動をメモするよう求められた。

ステージ４：授業後の議論を行う

研究授業のあと、その学習チームはその授業が行われた日のうちに授業後の議論に参加した。

ステージ５：授業を修正する

授業後の議論のあと、その学習チームは A 先生によって行われた Class1 の授業計画を修正した。修正された授業はそれから、B 先生による Class2 とその次の Class3 で繰り返して行われた。したがって、3 つのサイクルの研究授業と授業後の議論があったということになる。

データと収集方法

教師の専門的成長に及ぼす授業研究の影響を測定するために、量的データと質的データの両方を、（改正）ポータケット授業研究アンケート（付録 3 参照）とキー・ラーニング・パスウェイ（付録 4 参照）に基づく教師の内省を用いて集められた。

予備調査の結果

以下のデータは改正ポータケット授業研究アンケートから収集したものである。項目はリッカート尺度の 1 から 5 を用いた。以下の意見は肯定的結果の証拠を示した。

ポータケット授業研究アンケート：

調査のパート A		
項目	意見	平均
1	研究授業は自分たちの包括的な目標に合致していた。	4.17
2	研究授業の開発は自分が教える生徒の思考や課題をよりよく理解させてくれた。	4.17
3	授業研究サイクルに参加することは価値ある専門的成長のための活動だった。	4.83
4	研究授業の授業中に生徒の学習や思考を観察することは重要な学習機会だった。	4.83
調査のパート B		
1	授業研究に参加した結果、私は授業計画と自分の授業を異なった視点から考える。	4.67
2	授業研究の結果、私は教材と発問を注意深く選んでいる。	4.67
3	授業研究の結果、私は授業を生徒がどう理解するかを予測し、計画している。	4.67
4	授業研究は自分がよりよい教師になる助けになった。	4.67

これらの結果は、以下に要約したキー・ラーニング・パスウェイにもとづく教師の内省を用いて補われた。

教材についての知識の増加

教師たちは代数のトピックについて研究し、小学校 6 年生から中学校 1 年生におけるこのトピックの進展を研究した。彼らは研究授業で教える予定になっていた内容につながる一連のトピックをはっきりとさせた。このことはそのトピックについての必要条件を再考するのに役立ち、生徒たちがすでに学んでいるものから学ぶよう求められたものに至るまでのよりよいつながりを作ることに役立った。

指導についての知識の増加

この学習チームは、生徒たちがこのトピックについて直面した困難さに関して議論を行い、そして生徒たちが問題解決をより効果的に学ぶことができるかもしれない別の方法について討議した。その方法のひとつは、生徒たちの体系的な思考の練習の枠組みをもたらすポリアの問題解決モデルを用いることである。このモデルは新任教師にとって目新しいものであり、彼らの何人かはこのモデルが数学的問題解決を教えることに有益だったことを強調した。

学習チームの教師たちはまた、自律的・協働的学習と関連する文献を掘り下げて研究した。具体的にいうと、彼らは共同学習についてよりいっそう勉強し、共同学習が個別学習に比べてより高い達成につながるということを広範囲の文献から学んだ。共同学習の 5 つの基礎的要素、すなわち、積極的な関わり合い、対面相互作用、個人とグループの説明責任、個人間と小グループのスキル、グループでの処理に関する知識、を新たに得るとともに、教師たちは生徒間の協働を高めるため、よりいっそう意識的にグループ活動を促進し、課題や問題を考案した。ある教師は、「私たちの教授法に共同学習を用いることで、21 世紀のスキルのひとつを生徒たちに身につけさせることができる。たとえばその一つとして、生徒たちが協働的学習者になるのを手助けすることができるのだ」とコメントした。

教師の生徒観察能力の伸長

教師観察者は生徒の思考、理解、問題の解決、そして生徒間に起こる共同ないし非共同グループ・ダイナミックスを観察し分析するために提供された観察用チェックリストを活用した。チームのメンバーは、学習の成果やそのグループのダイナミックスに影響を及ぼしたグループにおけるいくつかの効果のないリーダーの行動を観察した。ある教師は、「何人かの生徒たちによって示された好ましくない行動はそのグループでの“ミスマッチ”に起因したかもしれない。それに続くグループ活動において、望ましい行動をもたらすためにどのように生徒たちの性格にもとづいて彼らをグループ分けするかに気を配った」とコメントした。

より強固になった平等な同僚ネットワーク

より強固な平等な同僚ネットワークについての証拠は、専門的実践のコミュニティを作

り上げるなかにみられた。そこで、そのチームの教師たちは生徒たちの学習、教授方略、教材、そして生徒の学習成果を議論した。この授業研究の協働の結果として、教師たちはより気軽にほかの人の授業を観察するようになり、そして生徒の学習を改善するという共通の目標を持って、長所と短所を議論するようになった。また他人から学び、教材を共有し、そして助け合おうとする意欲が見られた。

日々の実践と長期目標とのより強固なつながり

授業研究サイクルのいたるところで、この学習チームは 21 世紀のコンピテンシーと生徒たちに学びと生活の道を開いてやることとをどうやってつなげられるかを細かに議論した。このチームが授業計画に関わる活動を行うときには、生徒たちを自律的・協働的学習者へと成長させるという長期的包括的目標が絶えず表に現れてきた。教師たちはまた、この授業研究を経験した後、日々の授業の準備をするときにこの目標に気を配るようになったと振り返っている。

制約

おもな制限は時間的要因である。教師たちにとって、会合を持ち、議論に参加する共通の機会を見つけることはとても困難であった。重い教育義務があるため、そのチームのメンバーたちはすべての研究授業を観察することもできなかった。もうひとつの制約は対象生徒のサンプルが小規模であることである。観察、データの記録と分析における教師たちの困難もまた制約の一つである。このことは、さまざまな教育機関からの博識な人たちと協働することによって対処することができるかもしれない。つまり教科内容的知識に長けた人、授業研究経験を持つ人、データ処理の専門家との協働によってである。

結論と示唆

授業研究はシンガポールの学校においてますます日常的なものとなりつつある。それは授業計画のデザイン、実際の授業の観察、生徒の学習観察についての議論の協働的努力を通じて、教師たちに専門的知識を高める機会をもたらすものだからである。そのような協働的学習の基盤は、教材についての知識の増加、数学的問題解決を促す指導、生徒の学習を観察する力の高まりなどの点で、中学校の教師に肯定的な影響を与えている。これらの見いだされたことは将来、教師の能力を高め、学校ごとのカリキュラムの革新を可能にするような教師主導の専門的成長の基盤の発展を根底から促進するために、学校のリーダーないし政策立案者によって用いることができる。このことは、さまざまな研修における伝統的なワークショップにかわる、教師たちのための専門的成長のための代替的な形式としての授業研究の有効性に関するさらなる調査研究の必要性を示している。

参考文献

Barber, M., & Mourshed, M. (2007). *How the world's best performing school systems come out on top*. London: McKinsey and Company.

Wei, R.C., Darling Hammon, L., Andree, A., Richardson, N. & Orphanos, S. (2009). Professional learning in the learning profession: *A status report on teacher* *development in the United States and abroad*. Dallas, TX. National Staff Development Council.

Chong-Mok, W. Y. (2010). *Teaching and learning of 21st century competencies in schools*. NIE TE21 Summit, 2 Nov 2010. Retrieved 29 September 2011 from www.nie.edu.sg/files/EPD%20Presentation%20%40%20TE21%20Summit

DuFour, R., & Eaker, R. (1998). *Professional learning communities at work: Best practices for enhancing student achievement*. Bloomington, IN: Solution Tree (formerly National Educational Service).

Stifler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

Lewis, C. C. (2002). *Lesson study: a handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia, PA: Research for Better Schools, Inc.

Cowan, P. (2006). *Teaching Mathematics: A handbook for primary and secondary school teachers*. New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Appel, G., Leong, M., Mangan, M.T., Mitchell, M. & Stepanek, J. (2007). *Leading lesson study: A practical guide for teachers and facilitators*. Thousand Oaks, California: Corwin Press.

付録　1

ポリアモデル
一元一次方程式の形成

問題解決プロセス（ポリアのモデル）

ステップ１：問題を理解すること

- 何を見つけたいか
- どんな情報があるか
- どんなことが知られてないか

ステップ２：計画をたてること

- 方程式を作る

ステップ３：計画を実行すること

- 方程式を解く

ステップ４：振り返ること

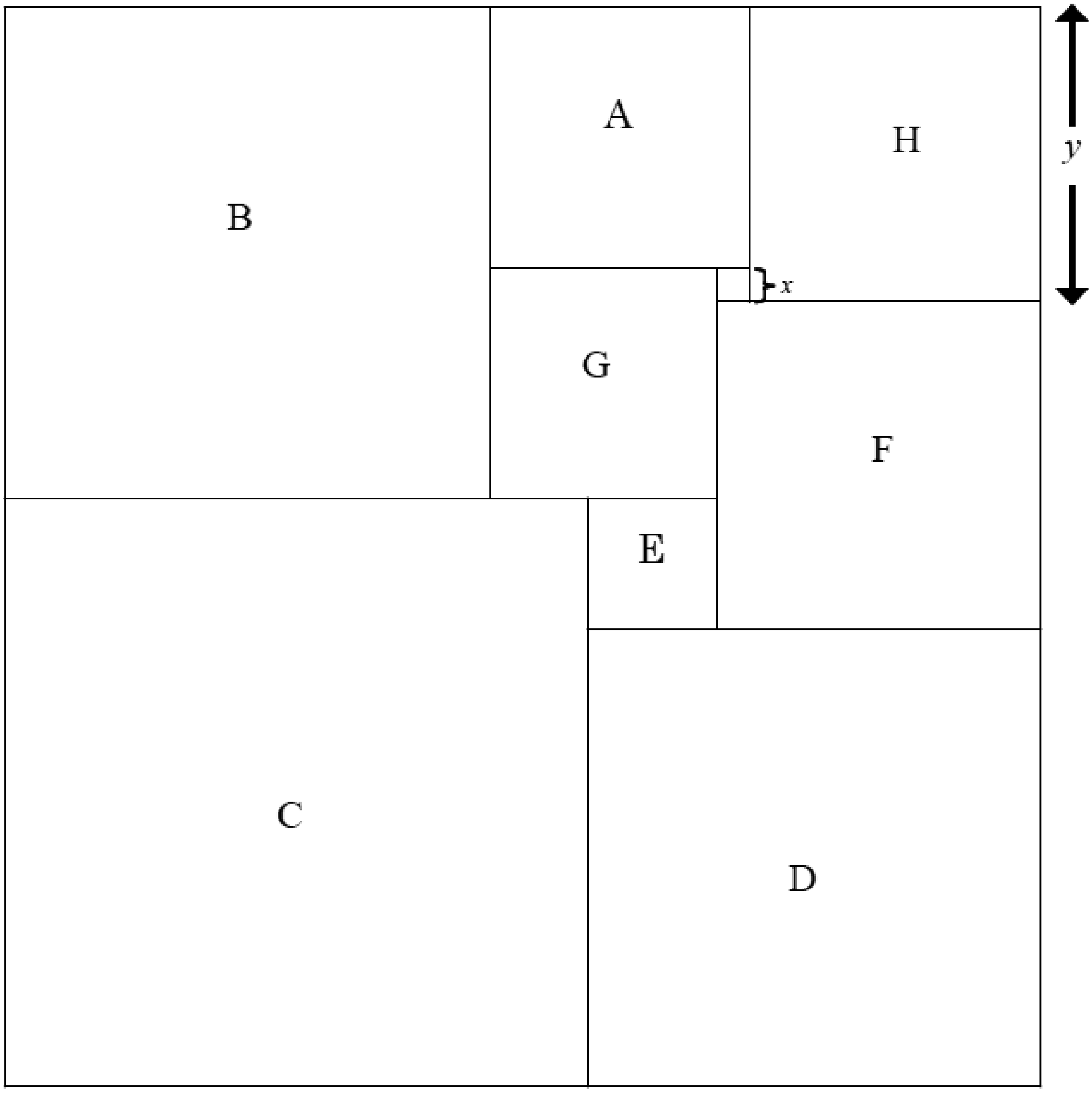
- 解答は妥当か
- 元の問いの要求を満たしているか
- 解答を導くより簡単な方法はあるか
- ほかの問いを解くために解答を拡張する

付録２

問題

学校は生徒たちに学校の土地の小さな諸区画を配ることに決めます。生徒たちはこれらの区画で自分たちの庭を開拓する責任が与えられます。
長方形の土地は下記の数字で示されたような小さな正方形の区画に分けられます。最も小さな区画の長さは x メートルです。 四角い区画 H の長さは y メートルです。

[注：図は原寸ではありません]



以下のそれぞれの問いを解くためにポリアモデルを用いる。

a) x と y を使ってそれぞれの正方形の一辺の長さを求めなさい

b) x を使って y を表しなさい。

c) F の周囲の長さの 6 分の 1 と E の周囲の長さの 3 分の 2 の合計は 208 メートルです。
x の値を求めなさい。

d) 長方形の土地の周りにフェンスを作るためにかかる費用は 2860 ドルです。
フェンス 1 メートルにつき 2.20 ドルがかかるとして、x の値を求めなさい。

e) 男の子は、毎秒 8 メートルの速度で、B の周りを走って回りました。
女の子は、毎秒 5 メートルの速度で、F の周りを走って回りました。
男の子と女の子が両方走り終わるのにかかる時間は合わせて 124 秒です。
x の値を求めなさい。

（出典：HeyMath!@Sankhyaa Learning (P) Ltd）

付録 ３

ポータケット授業研究アンケート

SD	D	N	A	SA
全く思わない	思わない	普通	そう思う	かなりそう思う

Part 1: 授業研究サイクル		SD	D	N	A	SA
1	授業研究サイクルの間の会議は都合のよいときに行われた。	1	2	3	4	5
2	授業研究サイクルの間の会議にはすべて出席した。	1	2	3	4	5
3	自分の授業研究チームは研究授業を計画するために効果的に協働した。	1	2	3	4	5
4	研究授業は自分たちの包括的目標に合致していた。	1	2	3	4	5
5	自分の授業研究グループは研究授業を手助けするために教科書、調査、そのほか外部の情報を用いた。	1	2	3	4	5
6	授業研究サイクルの間、好ましい生徒の理解に役立つ研究授業の問題に取り組むための機会をもった。	1	2	3	4	5
7	研究授業を開発することは自分が教える内容やの教え方の問題を深く考えさせてくれる。	1	2	3	4	5
8	研究授業を開発することは自分が教える内容の知識を増やしてくれる。	1	2	3	4	5
9	研究授業を開発することは自分が教える生徒の思考や課題をよりよく理解させてくれる。	1	2	3	4	5
10	研究授業の授業中に生徒の学習や思考を観察することは重要な学習機会だった。	1	2	3	4	5
11	自分たちの研究授業は成功したと感じる。	1	2	3	4	5
12	授業研究サイクルに参加することは価値ある専門的成長のための活動だった。	1	2	3	4	5

Part 3: 授業研究からの応用と学習	SD	D	N	A	SA
13　授業研究から自分が教える内容と教え方についての具体的な新しい理解を得た。	1	2	3	4	5
14　これまでにこれらの新しい理解を自分の授業に応用してきた。	1	2	3	4	5
15　授業研究への参加の結果、授業計画と自分の授業が異なると考える。	1	2	3	4	5
16　授業研究の結果、教材と発問を注意深く選んでいる。	1	2	3	4	5
17　授業研究の結果、自分の授業を生徒がどう理解するかを予測し、計画している。	1	2	3	4	5
18　授業研究は自分がよりよい教師になるのを助けてきた。	1	2	3	4	5

19　授業研究の強みは何だと思いますか。

20　あなたは授業研究についてどんな関心をもっていますか。

21　わたしたちの授業研究をよりよく実行するのに役立つどんな提案がありますか。

Adapted from Jennifer Stepanek, Gary Appel, Melinda Leong, Michelle Turner Mangan, and Mark Mitchell, *Leading Lesson Study: A Practical Guide for Teachers and Facilitators*, (Thousand Oaks, Corwin Press) 147-148.

付録　4

教師の内省
キー・ラーニング・パスウェイ

1	教材についての知識の増加
	証拠：
	障壁：
2	指導についての知識の増加
	証拠：
	障壁：
3	生徒たちを観察する能力の増加
	証拠：
	障壁：
4	より強固で平等な同僚ネットワーク
	証拠：
	障壁

5	日々の実践と長期目標とのより強固なつながり
	証拠：
	障壁：
6	より強固な動機と効力感
	証拠：
	障壁：
7	利用可能な授業計画の質の改善
	証拠：
	障壁：

Adapted from Jennifer Stepanek, Gary Appel, Melinda Leong, Michelle Turner Mangan, and Mark Mitchell, *Leading Lesson Study: A Practical Guide for Teachers and Facilitators*, (Thousand Oaks, Corwin Press) 145.

Enhancing Mathematics Teachers' Professional Development through Lesson Study
- A case study in Singapore -

Yeap Ban Har, Marshall Cavendish Institute
Peggy Foo, Marshall Cavendish Institute
Soh Poh Suan, Clementi Town Secondary School

Abstract

The quality of teachers has been identified as one of the critical success factors of high-performing education systems. The main purpose of this study is to investigate how lesson study can deepen the professional development of teachers in Singapore. The findings will be derived from a case study in a secondary school. The findings will be discussed in terms of knowledge of subject matter, instruction and other impacts such as teachers' perceptions of collegiality among colleagues. Implications from these findings can help school leaders and/ or policy makers consider the choice and implementation of lesson study as an effective ground up, teacher-driven professional development platform to raise the collective expertise of teachers in the long run.

Introduction

Over the past five decades, the Singapore education system has evolved continually to meet the needs of the independent nation at different stages of her development. The series of reforms have proven to build a robust education system with high achievements in international studies such as TIMSS and PISA, particularly in Mathematics and Science. The international study by McKinsey & Company (2007) has identified Singapore's education system as one of the best performing education systems in the world. Concluding that the "quality of an education system cannot exceed the quality of its teachers", the study identifies the quality of teachers and the quality of instruction as two of the three main factors for the consistently high performance of our education system. In addition, a more recent study published by the National Staff Development Council (NSDC) (Feb 2009) has affirmed the high standing of our education system and recognized the effective strategies put in place by the Ministry of Education, Singapore (MOE) in relation to teachers' professional development.

Mathematics Education

Singapore's Mathematics education focuses on mathematical problem-solving at the heart of its curriculum. It was last revised in 2007 and continues to emphasize on conceptual understanding, skill proficiencies and thinking skills in the teaching and learning of Mathematics. Teachers were asked to provide more opportunities for students to discover, reason and communicate Mathematics. Students were encouraged to engage in discussions and activities where they can explore possibilities and make connections.

21st Century Education

Though Singapore has gained a high recognition for her Mathematics education, there is an urgent need to take stock of the strengths of the system and concerns of the 21st century learning, given the context of a rapidly changing world. Like many countries, Singapore faces the challenge of preparing students for life and work in the 21st century. In response to the global trends, MOE developed a 21st Century Framework to articulate the new sets of competencies and desired student outcomes. They key competencies were 1) civil literacy, global awareness and cross cultural skills; 2) critical and inventive thinking; and 3) information and communication skills. The desired student outcomes being a confident person, a self-directed learner, an active contributor and a concerned citizen (NIE TE 21, 2010).

In order to develop the above competencies and achieve the desired outcomes, teachers need to change their instructional approaches in the classroom. MOE recognizes that teachers are the key to the change and is committed to enhance the professional development of teachers to enable the change.

Professional Learning Community

In 2008, MOE announced a nation-wide effort to enhance the professional expertise of their teachers by developing each school into a Professional Learning Community (PLC).

The key objective of PLCs is to improve instructional practice that leads to improved student learning outcomes. Each PLC will embrace 3 Big Ideas, namely (DuFour & Eaker, 1998)

1) Focus on Student Learning
2) Focus on Collaborative Culture
3) Focus on Data-Driven Outcomes

Within a PLC, teachers are grouped into learning teams. Each team is guided by 4 critical questions on improving instructional approaches in the classroom. They are

1. **What is it we expect students to learn?**
2. **How will we know when they have learned it?**
3. **How will we respond when they don't learn it?**
4. **How will we respond when they already know it?**

- *www.allthingsplc.org*

In this PLC context, schools are encouraged to choose any professional development tools or platforms to embrace the 3 Big Ideas and 4 critical questions.

Lesson Study

One of the tools is Lesson Study. In particular, Japan's method of teaching Lesson Study is focused on because of Japanese students' high levels of achievement and it being centred on the idea that teaching is a complex, cultural activity (Stifler & Hiebert, 1999).

Lesson Study, also termed as research lesson, is known as kenkyuu jugyou in Japanese (Lewis, 2002), where kenkyuu means research or study, and jugyou means lesson(s) or instruction. It is seen as a shift from teaching as telling to teaching for understanding in Japanese Mathematics and Science education (Lewis, 2002), valued by educators in Japan. The idea is simple: teachers coming together working in a group throughout the lesson study process, collaborating to plan, observe and reflect on lessons. However, developing and implementing effective lesson study can be complex, as there are factors at work (Stifler & Hiebert, 1999).

The lesson study process consists of different parts – goal setting, research lesson planning, lesson teaching and evaluation, and consolidation of learning.

For goal setting, a group of teachers identifies the research theme. It could be students' weakness in an area of learning, or a topic which educators find challenging to teach.

Based on the identified goal, the team develops a lesson, called a research lesson. The lesson goals are defined, with the teachers spending time investigating possible resources, considering available lesson plans to start with while tapping on their own experiences (Lewis, 2002). The thoughtful design of the lesson plan is the crux of an effective lesson – a commonality in the professional practice of effective teachers (Cowan, 2006).

The lesson planned is then taught by one teacher while the other team members are present to observe the lesson and make notes as well as collect evidence of student learning and thinking. There is then a discussion involving everyone in the lesson study group, evaluating and reflecting on the lesson. The original lesson plan is then revised.

With the revised plan, it is taught to another group of students. Meeting up after the lesson to evaluate, reflect and work on the lesson plan will take place and the cycle can be repeated with each new class the improved plan is delivered to (Appel, Leong, Mangan, Mitchell & Stepnaek, 2007).

Finally, there is a consolidation of learning for sharing purposes. This is seen as an important part of the lesson study process as the consolidating and sharing consist of the findings about teaching and learning, together with the teachers' reflections.

With the knowledge gained, teachers can use them in planning and conducting future lessons (Lewis, 2002).

Research Question

In this study, the research question being investigated is "What are the impacts of Lesson Study on the professional development of Secondary Mathematics teachers?"

Method

Participants

The participants are seven Mathematics teachers of a learning team in a secondary school. The profiles of the teachers and their roles are shown in Table 1 below.

Table1. Profiles of teachers involved

Teacher	Profiles (years of teaching experience in Mathematics)	Role during research lessons (Sample size of classes, N, shown in brackets)_
A	Experienced Teacher (eight years)	Teaching : Class 1 (N = 39) Observer : Class 3
B	Experienced Teacher (thirty-two years)	Teaching : Class 2 (N = 36) Teaching : Class 3 (N = 37) Observer : Class 1
C	Beginning Teacher (two years and six months)	Observer : Class 2 and 3
D	Experienced Teacher (eleven years)	Observer : Class 2
E	Experienced Teacher (six years and six months)	Observer : Class 2 and 3
F	Beginning Teacher (one year)	Observer : Class 2 and 3
G	Beginning Teacher (six months)	Observer : Class 2 and 3

Two of these teachers were research teachers for three Secondary One Mathematics classes (in three cycles). 112 Secondary One Express stream students (13 years old) were involved. The team consisted of four experienced and three beginning teachers i.e. less than 3 years of teaching experience.

Procedure

Stage 1: Craft Research Theme

At the start of the lesson study cycle, the learning team came together to identify the research theme based on the school's mission, vision, Mathematics curriculum goals and 21st Century Competencies Framework. From the discussion, the teachers decided on **"developing students to be self-directed and collaborative learners."** This theme gave the learning team focus and direction as they commenced their lesson study cycle.

Stage 2: Plan a Lesson

In the lesson planning sessions, the team explored using group work to facilitate the forming and solving of algebraic equations through the use of Polya's model for problem solving. Prior to the research lesson, two lessons were conducted to introduce the Polya's 4-step model to students (refer to Appendix 1).

Stage 3: Conduct the research lesson

For the research lesson, the lesson objectives are:

(a) Apply Polya's model to solve algebraic word problems

(b) Use the strategy of forming algebraic equation in one unknown to solve word problems

The 45-minute research lesson was divided into 4 main phases: Introduction, Group Work, Presentation, and Consolidation phases.

Students had been previously assigned to groups of four and the roles of the group members were clearly explained (namely, Leader and Gatekeeper, Scribe and Checker, Presenter and Praiser and Taskmaster and Timekeeper).

At the Introduction phase, the first 5 minutes of the lesson was used to brief the students on the goals of the lesson and to reiterate the roles of the group members. In their groups, students were tasked to solve a problem. It was a scenario where a piece of rectangular land was divided into small square patches. Students were required to find the length of each square, to express y in terms of x, and to formulate algebraic equations to solve questions related to the problem (refer to Appendix 2). During the group work phase, the teacher circulated among the groups to check on their progress, attend to queries and provide affective support. At the Presentation phase, students from some groups were called upon to present their solutions to the class. At the Consolidation phase, the teacher discussed the solutions and consolidated the learning with the class.

The research lesson was observed by members of the learning team. Observers were tasked to take notes on the student outcomes and behaviours related to self-directed and collaborative learning.

Stage 4: Conduct a Post-Lesson Discussion

After the research lesson, the learning team engaged in a post-lesson discussion on the same day as the research lesson.

Stage 5: Revise the Lesson

After the post-lesson discussion, the learning team went on to revise the lesson plan carried out for Class 1 by Teacher A. The revised lesson was then repeated for Class 2 and subsequently Class 3 by Teacher B. Hence, there were 3 cycles of research lessons and post lesson discussions.

Data and Collection Methods

To measure the impacts of lesson study on the professional development of teachers, both quantitative and qualitative data were collected using Pawtucket Lesson Study Questionnaires (Adapted) (refer to Appendix 3) and teachers' reflection based on Key Learning Pathways (refer to Appendix 4).

Preliminary Findings

The following data were collected from the adapted Pawtucket Lesson Study Questionnaires. The items were based on a Likert scale of 1 to 5. The following statements showed evidence of positive results:

Pawtucket Lesson Study Questionnaire :

Part A of Survey		
Item	Statement	Mean
1	The research lesson matched our overarching goal	4.17
2	Developing the research lesson allowed me to better understand student thinking and/or challenges in my content	4.17
3	Participating in LS Cycle was a valuable professional development activity	4.83
4	Observing student learning and thinking during the teaching of the research lesson was an important learning opportunity	4.83
Part B of Survey		
1	I think about Lesson Planning and my teaching differently as a result of participating in LS	4.67
2	I more carefully select instructional materials and questions as a result of LS	4.67
3	I anticipate and plan for student understanding in my lessons as a result of LS.	4.67
4	Lesson Study has helped me to be a better teacher	4.67

These results were supplemented with teachers' reflections based on Key Learning Pathways which were summarized below:

Increased Knowledge of Subject Matter

Teachers studied the topic of algebra and the progression of this topic from Primary 6 to Secondary 1. They clarified the sequence of the topic leading up to the content they were planning to teach in the research lesson. This helped teachers to revisit the pre-requisites of the topic and make better connections from what students have already learnt to what they were required to learn.

Increased Knowledge of Instruction

The team discussed on the challenges the students faced with the topic and deliberated on the different ways that students could learn problem-solving more effectively. One of the ways is to use Polya's model for problem solving which provides a framework for students to practice systematic thinking. This model was new to the beginning teachers and some of them highlighted that this model was useful in their teaching of mathematical problem-solving.

The teachers also delved into literature related to self-directed and collaborative learning. Specifically, they studied more about cooperative learning and learnt from extensive literature that cooperative learning encourages higher achievement compared to individualistic learning. With the newly acquired knowledge of the five basic elements of cooperative learning, namely positive interdependence, face-to-face interaction, individual and group accountability, interpersonal and small group skills as well as group processing, they team facilitated group work and designed the task/ problem more purposefully to promote collaboration among the students. One teacher commented, 'Using cooperative learning in our teaching approach can help students to develop one of the 21st century skills i.e., to develop students to become collaborative learners.'

Increased Ability to Observe Students

Teacher-observers made use of the observation checklist provided to observe and analyse student thinking, understanding, problem solving and the cooperative or non-cooperative group dynamics taking place among the students. Team members had observed some ineffective leaders' behaviour in the groups which affected the learning outcomes and the dynamics of the group. One teacher commented, 'The undesirable behaviour exhibited by some students could be due to 'mismatch' in the group. In subsequent group work, I have to be mindful how to assign the students based on their characteristics to bring about the desired behaviour.'

Stronger Collegial Networks

Evidence for stronger collegial networks was seen in the building of a community of professional practice where the team of teachers discussed student learning, teaching strategies, teaching resources and student learning outcomes. As a result of this lesson study collaboration, teachers had become more comfortable with observing one another's lessons, and discussing strengths and weaknesses with the common goal of improving student learning. There had also been a greater willingness to learn from one another, share teaching resources and help one another.

Stronger Connection of Daily Practice to Long-Term Goals

Throughout the lesson study cycle, the team discussed at length how they could link the 21st century competencies to prepare students for learning and life. As the team worked on the lesson plan, the long term overarching goals, to develop students to be self-directed and collaborative learners, were constantly surfaced. Teachers also reflected that after the lesson study experience, they were mindful of applying this goal in their preparation of daily lessons.

Limitations

The main constraint is time factor. It was a great challenge for teachers to find common time to meet and engage in discussions. Due to heavy teaching commitments, the members in the team were also not able to observe all research lessons. Another limitation is the small sample size. Teachers' difficulty in observing, recording and analysing data is another limitation. This could be addressed by collaborating with knowledgeable others from educational institutes who have the content knowledge, lesson study experience and data management expertise.

Conclusion & Implications

Lesson Study has become increasingly popular in Singapore schools as it provides opportunities for teachers to enhance their professional knowledge through collaborative efforts in designing a lesson plan, observing a real lesson and discussing observations of student learning. Such a collaborative learning platform shows positive impacts on teachers in a secondary school in terms of increased knowledge of subject matter, instruction for promoting mathematical problem-solving, enhanced ability to observe student learning and others. These findings can be used by school leaders and/or policy makers to promote such ground-up, teacher-driven professional development platform to enhance teachers' competencies and to enable school-based curriculum innovations in the future. This calls for further research on the effectiveness of Lesson Study as an alternative form of professional development for teachers versus traditional workshops in training settings.

References

Barber, M., & Mourshed, M. (2007). *How the world's best performing school systems come out on top*. London: McKinsey and Company.

Wei, R.C., Darling Hammon, L., Andree, A., Richardson, N. & Orphanos, S. (2009). Professional learning in the learning profession: *A status report on teacher development in the United States and abroad.* Dallas, TX. National Staff Development Council.

Chong-Mok, W. Y. (2010). *Teaching and learning of 21st century competencies in schools.* NIE TE21 Summit, 2 Nov 2010. Retrieved 29 September 2011 from www.nie.edu.sg/files/EPD%20Presentation%20%40%20TE21%20Summit

DuFour, R., & Eaker, R. (1998). *Professional learning communities at work: Best practices for enhancing student achievement.* Bloomington, IN: Solution Tree (formerly National Educational Service).

Stifler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

Lewis, C. C. (2002). *Lesson study: a handbook of teacher-led instructional change.* Philadelphia, PA: Research for Better Schools, Inc.

Cowan, P. (2006). *Teaching Mathematics: A handbook for primary and secondary school teachers.* New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Appel, G., Leong, M., Mangan, M.T., Mitchell, M. & Stepanek, J. (2007). *Leading lesson study: A practical guide for teachers and facilitators.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Appendix 1

Polya's Model
Formulate Linear Equations in One Unknown

<u>**Problem Solving Processes (Polya's Model)**</u>

Step 1: Understanding the problem.

- ○ What do you want to find?
- ○ What information is given?
- ○ What are the unknowns?

Step 2: Devising a plan.

- ○ Formulate an algebraic equation

Step 3: Carrying out the plan.

- ○ Solve the algebraic equation

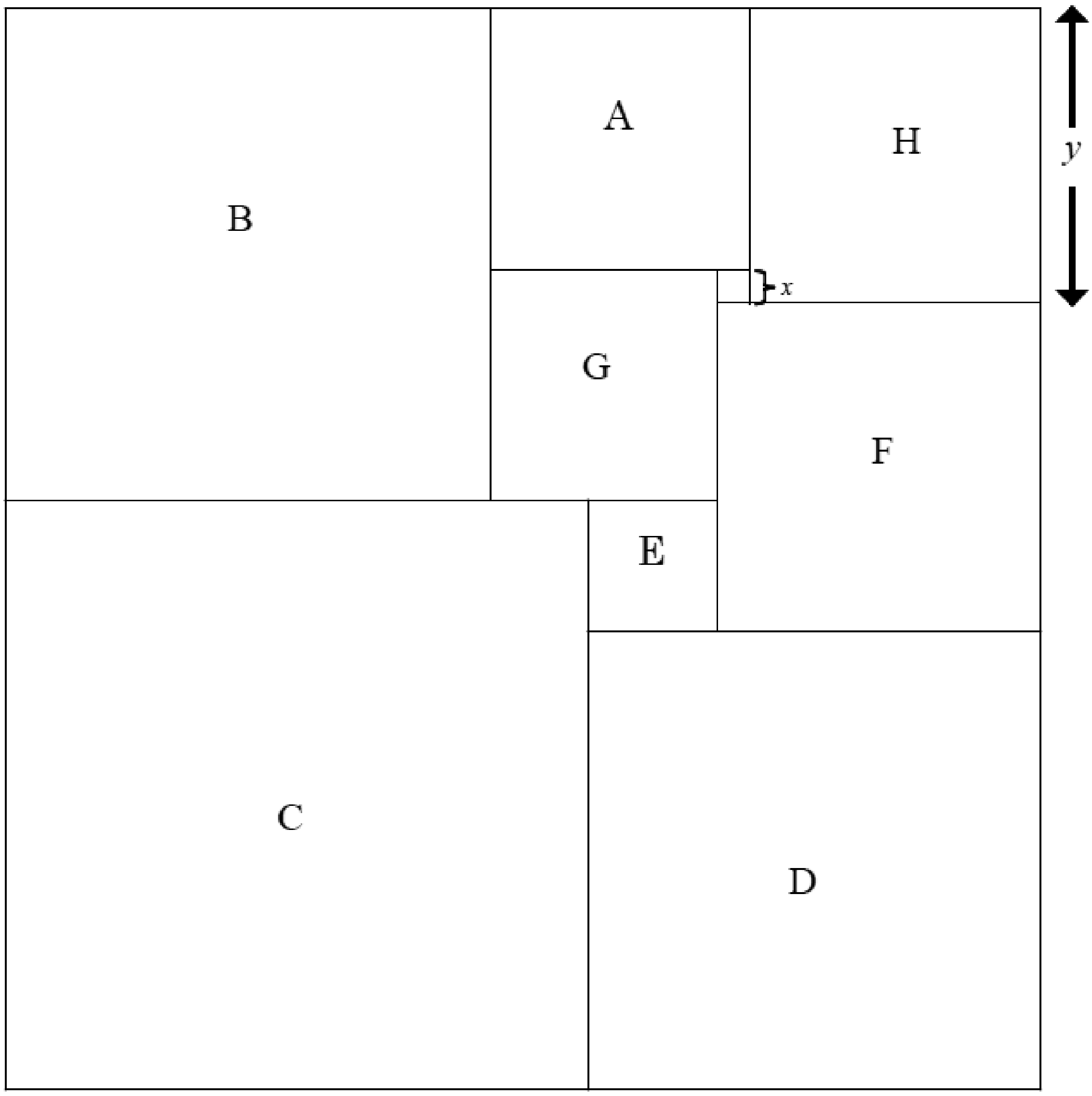
Step 4: Looking back.

- ○ Is the solution reasonable?
- ○ Does it satisfy the original problem?
- ○ Is there another easier method to find the solution?
- ○ Extend the solution to solve other problems

Appendix 2

Problem

A school decides to give out small patches of their land to students, who will be given the responsibility of growing their own garden in these patches.
The rectangular land is divided into small square patches as shown in the figure below.
The length of the smallest patch is x metres. The length of square patch H is y metres.
[Note: the diagram is not drawn to scale]



Make use of the Polya's model to solve each of the following questions.

a) Find the length of each square patch in terms of x and y.

b) Express y in terms of x.

c) The sum of one-sixth of the perimeter of F and two-thirds of the perimeter of E is 208 metres. Find the value of x.

d) The total cost of fencing up the perimeter of the rectangular land is \$2 860. Given that each metre of fence costs \$2.20, find the value of x.

e) A boy ran round the perimeter of B at a speed of 8 metres per second.
A girl ran round the perimeter of F at a speed of 5 metres per second.
The total time taken by both the boy and girl to complete their run is 124 seconds.
Find the value of x.

(Source adapted from HeyMath!@Sankhyaa Learning (P) Ltd)

Appendix 3

Pawtucket Lesson Study Questionnaire

SD	D	N	A	SA
Strongly Disagree	Disagree	Neutral	Agree	Strongly Agree

	Part 1: The Lesson Study Cycle	SD	D	N	A	SA
1	Meetings during the LS cycle were held at convenient times.	1	2	3	4	5
2	I was able to attend all of the meetings during the LS cycle.	1	2	3	4	5
3	My LS team collaborated effectively to plan a research lesson.	1	2	3	4	5
4	The research lesson matched our overarching goal.	1	2	3	4	5
5	My LS group used textbooks, research, or other outside information to help plan the research lesson.	1	2	3	4	5
6	We had an opportunity during the LS cycle to do the problem of the research lesson to help anticipate student understanding.	1	2	3	4	5
7	Developing the research lesson allowed me to think deeply about issues in my content or teaching.	1	2	3	4	5
8	Developing the research lesson allowed me to increase my content knowledge.	1	2	3	4	5
9	Developing the research lesson allowed me to to better understand student thinking and/or challenges in my content.	1	2	3	4	5
10	Observing student learning and thinking during the teaching of the research lesson was an important learning opportunity.	1	2	3	4	5
11	I feel our research lesson was successful.	1	2	3	4	5
12	Participating in a LS cycle was a valuable professional development activity.	1	2	3	4	5

Part 3: Applying and Learning From Lesson Study		SD	D	N	A	SA
13	I gained specific new understandings about my content and teaching from LS.	1	2	3	4	5
14	I have been able to apply these new understandings to my teaching.	1	2	3	4	5
15	I think about lesson planning and my teaching differently as a result of participating in LS.	1	2	3	4	5
16	I more carefully-select instructional materials and questions as a result of LS.	1	2	3	4	5
17	I anticipate and plan for student understanding in my lessons as a result of LS.	1	2	3	4	5
18	Lesson study has helped me to be a better teacher.	1	2	3	4	5

19 What do you think are the strengths of lesson study?

20 What are your concerns about lesson study?

21 What suggestions do you have that would help us better implement lesson study?

Adapted from Jennifer Stepanek, Gary Appel, Melinda Leong, Michelle Turner Mangan, and Mark Mitchell, *Leading Lesson Study: A Practical Guide for Teachers and Facilitators*, (Thousand Oaks, Corwin Press) 147-148.

Appendix 4

Teachers' Reflections
Key Learning Pathways

1	**Increased knowledge of subject matter**
	Evidence:
	Barriers:
2	**Increased knowledge of instruction**
	Evidence:
	Barriers:
3	**Increased ability to observe students**
	Evidence:
	Barriers:
4	**Stronger collegial networks**
	Evidence:
	Barriers:

5	**Stronger connection of daily practice to long-term goals**
	Evidence:
	Barriers:
6	**Stronger motivation and sense of efficacy**
	Evidence:
	Barriers:
7	**Improved quality of available lesson plans**
	Evidence:
	Barriers:

平成 23 年度　学者・専門家交流事業（文部科学省委託事業）

授業研究による数学及び理科教師の教授能力向上に関する東アジア 4 カ国国際会議
－PISA 型リテラシーの育成を目指す授業の分析を通して－

国際シンポジウム論文集

平成 24 年 3 月 15 日

広島大学大学院教育学研究科

印刷：ニシキプリント