

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）入学試験問題

物理学プログラム 量子物質科学プログラム（物理学分野）

専 門 科 目

2025 年 8 月 28 日 9:00～12:00

注意事項

（１）以下の用紙が配付されている。

問題用紙（表紙を含む）	5 枚
解答用紙	4 枚
下書き用紙	1 枚

（２）問題は全部で４問あり，[Ⅰ]～[Ⅳ]の問題番号および出題科目名を に示してある。これら全ての問題について解答せよ。

（３）解答は問題ごとに指定の用紙を用いること。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。

（４）解答用紙および下書き用紙の全てに受験番号を記入せよ。

（５）試験終了後，全ての解答用紙および下書き用紙を提出せよ。

I	力学
---	----

図1のように、質量 m の質点2個と質量 $M(M > m)$ の質点1個を、質量を無視できるばね定数 k の3個のばねで環状につなげた連成系を考える。なめらかな水平面にこの連成系を置き、円周に沿った各質点の座標を x_1, x_2, x_3 とする。この連成系の重心を並進運動させないようにして、円周上に沿って微小振動させる。この運動について、以下の問いに答えよ。

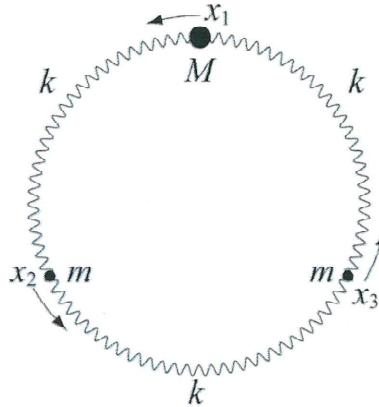


図1：連成系

- (1) この系のラグランジアンを書け。

時刻 t で各質点は角振動数 $\omega (\geq 0)$ で、 $x_q(t) = A_q \exp(i\omega t) (q = 1 \sim 3)$ の解をもつとする。

- (2) 3個の質点の運動方程式は、 (3×3) 行列 B を用いて、

$$B \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \exp(i\omega t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \text{式 (I)}$$

の形にまとめられる。各成分がわかるように行列 B を書け。

運動方程式の解として、 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ 以外の解を満たす ω は三つある。これらを ω_1, ω_2 および ω_3 とする。そのうちの一つは、 $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}}$ である。

- (3) ω_1 と ω_2 を求めよ。なお、 $\omega_1 < \omega_2$ とする。

- (4) ω_2 のとき、式 (I) の方程式を解き、その運動を説明せよ。

- (5) ω_3 のときの連成系の力学的エネルギーを、 k, M, m および A_1 を用いて表せ。

Ⅱ 電磁気学

アンペールの法則の微分形と積分形はそれぞれ次のように与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}, \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、 μ_0 は真空の透磁率、 $\mathbf{B}$ は磁束密度ベクトル、 $\mathbf{i}$ は電流密度ベクトル、 I は閉曲線 C を貫く電流の総和である。

- (1) アンペールの法則の①式から②式を導出せよ。
- (2) アンペールの法則の②式について、その物理的意味を説明せよ。

図1のように、真空中に半径 a の無限に長い直線状導体に電流 I_1 が流れている場合を考える。ただし、電流は導体内部を一様に流れているとする。

- (3) 直線状導体の内部および外部の磁束密度の大きさを中心からの距離 r の関数として求めよ。
- (4) 次に、直線状導体の中心から距離 $R (>a)$ の場所に太さを無視できる、正方形の導線回路の一边を直線状導体と平行に置く。この導線回路に時計回りに電流を流す時、距離 R にある導線回路の一边に存在する電子1個が受ける力ベクトル $\mathbf{F}_e$ を電子の速度ベクトル $\mathbf{v}_e$ と距離 R での磁束密度ベクトル $\mathbf{B}(R)$ を用いて表せ。電子の電荷は $-e$ とする。
- (5) 導線回路の一边の長さを L とし、流れる電流の大きさを I_2 とする時、ある時刻に導線回路の一边に存在する電子の数を求め、それを使ってこの導線回路全体にかかる力の大きさを答えよ。磁束密度は問(3)で求めたものを用いること。
- (6) 電流 I_2 を流すのを止め、導線回路を電流 I_1 が流れている直線状導体から離れる向きに一定の速度 v で運動させた。導線回路が直線状導体からの距離 R にいる時の時刻を $t = 0$ とした場合、時刻 t での導線回路に生じる起電力の大きさと向きを答えよ。ただし、自己誘導による起電力は含まない。

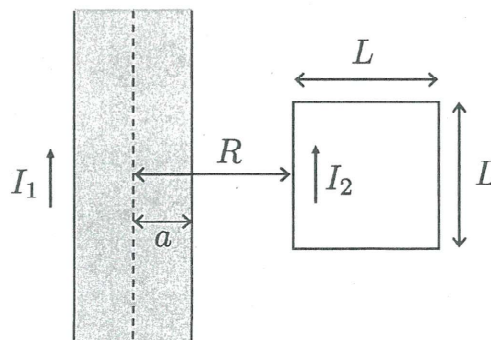


図1：直線状導体と導線回路の配置。

III	量子力学
-----	------

一次元運動をする質量 m の 2 つの電子に次の電子間ポテンシャルが作用している。

$$V(x_1, x_2) = V(|x_1 - x_2|) = \begin{cases} -V_0 & |x_1 - x_2| \leq a \\ 0 & |x_1 - x_2| > a \end{cases}$$

- (1) それぞれの電子の運動量を p_1 , p_2 とし、この 2 つの電子系のハミルトニアンを与えられたポテンシャル $V(x_1, x_2)$ を用いてかけ。
- (2) 2 つの電子系の重心座標系 $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$ と相対座標系 $x = x_1 - x_2$ を考える。それぞれに共役な運動量 P と p を用いて小問 (1) のハミルトニアンを表せ。
- (3) この 2 電子系の全運動量をゼロ ($P=0$) とする。相対運動のハミルトニアンエネルギー固有値 E を用いて $\frac{mE}{\hbar^2} = -k^2$ と $\frac{m(E+V_0)}{\hbar^2} = q^2$ ($k > 0$, $q > 0$) を導入する。このとき、2 つの電子の座標 x_1 と x_2 の入れ替えは、相対座標 x に関する固有関数のパリティ変換に対するふりまいと対応させることができる。パリティが偶となる相対座標 x に関する固有関数の $x = \pm a$ における接続条件を求めよ。
- (4) 同じく、パリティが奇となる相対座標 x に関する固有関数の $x = \pm a$ における接続条件を求めよ。
- (5) 最低エネルギー固有値を取るのはパリティ偶の固有関数とパリティ奇の固有関数のどちらか。理由とともに答えよ。ここで $-\cot \theta = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ の関係を用いても良い。
- (6) 最低エネルギー固有状態における 2 つの電子の合成スピンを考える。
 - (a) 2 つの電子系の合成スピンについて対称、反対称の観点から説明せよ。
 - (b) スピンを考慮に入れた系での全体の波動関数は、空間分布を表す波動関数とスピン波動関数でかける。最低エネルギー固有状態における 2 つの電子の合成スピンの大きさはいくつか。理由とともに答えよ。

(3) の問題文に記載された数式が不鮮明であったため、問題用紙の配付時に、数式を鮮明に印刷した補足説明紙を併せて配付した。なお、補足説明紙の内容は、本ファイルの最終ページに掲載。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野） 入学試験問題

IV	熱・統計力学
----	--------

質量 m 、固有角振動数 ω をもつ1個の一次元調和振動子について考える。

- (1) 古典論で考える場合、調和振動子のハミルトニアンは $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ で与えられる。分配関数 $Z_c = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-H/k_B T} \frac{dp dx}{h}$ を求めよ。ここで、 p は運動量、 x は変位、 T は絶対温度、 k_B はボルツマン定数、 h はプランク定数である。ただし、ディラック定数 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ を用いてもよい。
- (2) 量子論で考える場合、調和振動子のエネルギー準位は $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ (n は量子数)で与えられる。分配関数 Z_q を求めよ。また、問(1)の解は、問(2)の解のどのような極限か答えよ。
- (3) 問(1)の Z_c と問(2)の Z_q から、それぞれのエネルギー平均値 $\langle \varepsilon_c \rangle$ および $\langle \varepsilon_q \rangle$ を求めよ。

独立した N 個の調和振動子からなる系を、問(2)と同様に量子論で考える。

- (4) この系の比熱 C を求めよ。
- (5) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を導出し、エントロピー S を求めよ。
- (6) F を T の関数として、低温領域 ($k_B T \ll \hbar\omega$) と高温領域 ($k_B T \gg \hbar\omega$)、それぞれでの極限の値 F_L および F_H から、 S の値 S_L および S_H を求めよ。また、 S_L と S_H の温度に対するふるまいを説明せよ。

補足説明

p4、小問(3)の問題文にある数式は

$$\frac{mE}{\hbar^2} = -k^2$$

$$\frac{m(E + V_0)}{\hbar^2} = q^2$$

($k > 0$, $q > 0$) であり、 $\hbar$ はディラック定数である。