

出題意図

力学

ばねと質点の連成系の規準振動について、解析力学による解法や解の物理的意味（運動の様子や力学的エネルギー）について問う問題です。

電磁気学

電流と磁場について、アンペールの法則、ストークスの定理、ローレンツ力、電磁誘導などの物理的理解を問う問題です。

量子力学

2 電子系の相対運動を一次元井戸型ポテンシャル問題に帰着させ、この系の基底状態の波動関数の性質の理解を問う問題です。

熱・統計力学

調和振動子について、エネルギーや比熱、エントロピーを正準集団を用いて考え、低温極限および高温極限での値を問う問題です。

I 力学

(1) 運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 \\ U &= \frac{1}{2}k\{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2\} \end{aligned}$$

したがって、ラグランジアン L は

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 - \frac{1}{2}k\{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2\} \end{aligned}$$

(2) 3つの質点に関するラグランジュ運動方程式は、

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2 - x_3) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(-x_1 + 2x_2 - x_3) &= 0 \\ m\ddot{x}_3 + k(-x_1 - x_2 + 2x_3) &= 0 \end{aligned}$$

である。これに、 $x_k = A_k \exp(i\omega t)$ を代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{pmatrix} 2k - M\omega^2 & -k & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \exp(i\omega t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) $|B|$ をラプラス展開して、 ω^2 について整理すると次式を得る。

$$\omega^2 \{ Mm^2\omega^4 - 2km(m + 2M)\omega^2 + 3k^2(2m + M) \} = 0$$

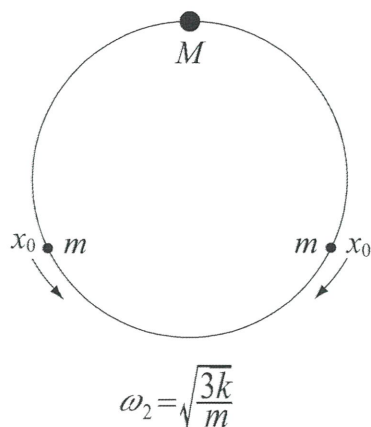
$\omega_3^2 = \frac{k}{m} + \frac{2k}{M}$ が $\{ \omega^2 \text{の二次式} \} = 0$ の解の一つであることから、もう一つの解も求め、次式のように因数分解できる。

$$Mm^2\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{3k}{m} \right) \left\{ \omega^2 - \left(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M} \right) \right\} = 0$$

したがって、 $\omega_1 = 0$ および $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ と求まる。

(4) $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ のとき、

(2) の解答に示した行列から、 $A_1 = 0$ および $A_3 = -A_2$ と求まる。これは、質量 M の重たい質点が静止して、質量 m の軽い質点が、下図のように反対称に振動する状態である。



(5) $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}}$ のとき、

$A_2 = A_3 = -\frac{M}{2m}A_1$ となる。質点の運動は位相がそろっているので、最大振幅の時の弾性エネルギーが連成系の力学的エネルギーとして求まる。

$$\begin{aligned}
 U_{\max} &= \frac{1}{2}k\{(A_1 - A_2)^2 + (A_2 - A_3)^2 + (A_3 - A_1)^2\} \\
 &= k(A_1 - A_2)^2 \\
 &= \left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2 kA_1^2
 \end{aligned}$$

II 電磁気学

(1) ①式の両辺を面積分し、ストークスの定理を用いる。

(2) 閉曲線 C に沿った磁束密度の積分は、閉曲線 C が囲む曲面を貫く電流の総和の μ_0 倍に等しくなる。

(3) アンペールの法則（積分形）を用いて

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a^2} r \quad (0 \leq r < a), \quad B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (a \leq r).$$

(4)

$$\mathbf{F}_e = -ev_e \times \mathbf{B}(R).$$

(5) 単位時間辺りに導線のある断面を通過する電子の個数は I_2/e であるので、長さ L の導線中に存在する電子の個数は

$$N = \frac{I_2 L}{ev_e}.$$

直線状導体から離れる方向を力の正の向きにとると、長さ L の導線にかかる力の大きさ F は

$$F = \left\{ \frac{\mu_0 ev_e I_1}{2\pi(R+L)} - \frac{\mu_0 ev_e I_1}{2\pi R} \right\} \frac{I_2 L}{ev_e} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{L^2}{R(R+L)}.$$

(6) 時刻 t における導線回路を貫く磁束 $\Phi(t)$ は

$$\Phi(t) = \int_0^L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(R+vt+\ell)} L d\ell = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \log \left[\frac{R+vt+L}{R+vt} \right],$$

であるので、ファラデーの電磁誘導の法則より生じる起電力の大きさは

$$V = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{L^2}{(R+vt+L)(R+vt)} v.$$

起電力の向きは図 1 の導線回路で時計周りに電流を流す向き。

III 量子力学

$$(1) H = \frac{(p_1)^2}{2m} + \frac{(p_2)^2}{2m} + V(x_1, x_2)$$

$$(2) H = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + V(x)$$

(3) パリティ偶のエネルギー固有関数は

$$\phi_+(x) = \begin{cases} Ce^{-kx} & x > a \\ A \cos qx & -a \leq x \leq a \\ Ce^{kx} & x < -a \end{cases}$$

ここで A, C は任意定数である。 $x = \pm a$ での接続条件 ($x = a$ のとき、 $Ce^{-ka} = A \cos qa$ 、 $-kCe^{-ka} = -qA \sin qa$) より

$$k = q \tan qa$$

となる。

(4) パリティ奇のエネルギー固有関数は

$$\phi_+(x) = \begin{cases} De^{-kx} & x > a \\ B \sin qx & -a \leq x \leq a \\ -De^{kx} & x < -a \end{cases}$$

ここで B, D は任意定数である。 $x = \pm a$ での接続条件 ($x = a$ のとき、 $De^{-ka} = B \sin qa$ 、 $-kDe^{-ka} = qB \cos qa$) は

$$k = -q \cot qa$$

となる。

(5) 最低エネルギー固有値を取るのはパリティ偶のときとなる。

(6) (a) 合成スピンの大きさが 0 のとき合成スピン波動関数は反対称である。

合成スピンの大きさが 1 のとき合成スピン波動関数は対称である。

(b) 合成スピンの大きさ: 0

電子はフェルミオンなので全体の波動関数は反対称である。最低エネルギー固有値を取るのはパリティ偶のときであるから、基底状態の波動関数は x_1 と x_2 の入れ替えに対して対称である。そのためスピン波動関数は反対称となるべきであり、そのときの合成スピンの大きさは 0 である。

IV 熱・統計力学

$$(1) \quad Z_c = \frac{2\pi k_B T}{\hbar \omega} \quad \text{もしくは、} \hbar \text{を用いて} \quad Z_c = \frac{k_B T}{\hbar \omega}$$

$$(2) \quad Z_q = \frac{e^{-\hbar \omega / 2 k_B T}}{1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}}, \quad Z_c \text{は} \hbar \omega / k_B T \rightarrow 0 \text{の高温極限}$$

$$(3) \quad \langle \varepsilon_c \rangle = k_B T$$

$$\langle \varepsilon_q \rangle = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \right)$$

$$(4) \quad \text{内部エネルギー} U = N \langle \varepsilon_q \rangle, \quad C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = N k_B \frac{e^{\hbar \omega / k_B T}}{(e^{\hbar \omega / k_B T} - 1)^2} \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2$$

$$(5) \quad F = N \left[\frac{1}{2} \hbar \omega + k_B T \log(1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}) \right]$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = N k_B \left[\frac{\hbar \omega}{2 k_B T} \coth \frac{\hbar \omega}{2 k_B T} - \log \left(2 \sinh \frac{\hbar \omega}{2 k_B T} \right) \right]$$

$$(6) \quad F_L = \frac{N}{2} \hbar \omega, \quad S_L = 0 \quad (\text{熱力学第3法則に従い、ゼロに近づく})$$

$$F_H = N k_B T \log \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right), \quad S_H = N k_B \left[1 - \log \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) \right] \quad (\text{温度の増加に伴い、増加し続ける})$$