

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目
---------------	------

受験番号	M
------	---

令和7年 8月 28日 9:00 ~ 12:00

注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙 (表紙を含む)	5 枚
解答用紙	3 枚
下書き用紙	3 枚

2. 問題は全部で 3 問ある.

3. 問 [3] では, (I) か (II) かいずれかの問題を選んで解答せよ.

4. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い, それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

5. 試験問題の表紙, 解答用紙, および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

6. 試験終了時には, すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目

令和 7 年 8 月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) $\det A$ を求めよ.
- (2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(B) 行列

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) B の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.
- (2) $J = P^{-1}BP$ がジョルダン標準形となる 3×3 の正則行列 P をひとつ求め, さらにこの行列 J を計算せよ.
- (3) 実数を成分とする 3×3 行列全体のなす集合 $M_{3 \times 3}$ を, 通常の加法とスカラー倍により実線形空間とみなす. この実線形空間の部分空間

$$S = \{ X \in M_{3 \times 3} \mid XB = BX \}$$

は, 3 個の行列 I_3, B, B^2 を基底に持つことを示せ. ここで I_3 は 3×3 の単位行列である.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目

令和 7 年 8 月実施

[2] 次の (A), (B), (C) のすべての間に答えよ.

(A) $\mathbb{R}$ 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$

により定める. 以下の間に答えよ.

- (1) 関数 f は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.
- (2) $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値連続関数 g に対し, 合成関数 $h(x) = g(f(x))$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.
- (3) $x = 0$ の近傍で定義された実数値関数 φ に対し, 合成関数 $F(x) = \varphi(f(x))$ を考える. 関数 φ と F が共に $x = 0$ で微分可能なとき, $\varphi'(0)$ を求めよ.

(B) 以下の間に答えよ.

- (1) 任意の $R > 0$ に対し, 関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ は $|x| \leq R$ において一様収束することを示せ.
- (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x$ を示せ.

(C) $\alpha > 0$ に対し,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\alpha} \right\}$$

とおく. 関数

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}$$

に対する広義重積分

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$$

は任意の $\alpha > 0$ に対して収束することを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目

令和7年8月実施

[3] このページの (I) か、次のページの (II) の、いずれかの問に答えよ。

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ。

(A) (X, d) を距離空間とする。点 $a \in X$ と正の実数 ε に対して

$$N(a; \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

とおく。以下の問に答えよ。

(1) 2 点 $a_1, a_2 \in X$ と 2 つの正の実数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対して、 $N(a_1; \varepsilon_1) \cap N(a_2; \varepsilon_2) \neq \emptyset$ ならば $d(a_1, a_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ が成り立つことを示せ。

(2) $N(a; \varepsilon)$ は距離空間 (X, d) の開集合であることを示せ。

(3) 距離空間 (X, d) は Hausdorff 空間であることを示せ。

(B) Y, Z を位相空間とし、 $f: Y \rightarrow Z$ を連続写像とする。以下の問に答えよ。

(1) Y がコンパクトなら $f(Y)$ もコンパクトであることを示せ。

(2) Y が連結なら $f(Y)$ も連結であることを示せ。

- (II) n を正の整数とし, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ を独立に 2 次元正規分布 $N_2(0_2, \Sigma_\rho)$ に従う 2 次元確率変数とする. ただし,

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

$\rho \in (-1, 1)$ であり, $N_2(0_2, \Sigma_\rho)$ の確率密度関数は

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(t_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + t_2^2)\right) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

で与えられる. また, $i = 1, \dots, n$ に対し,

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \end{pmatrix}, \quad X_i = \begin{cases} 1 & (\varepsilon_{i1} \geq 0) \\ -1 & (\varepsilon_{i1} < 0) \end{cases}$$

とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $\rho = 0$ のとき, ε_{11} と ε_{12} は独立に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことを示せ. ただし, $N(0, 1)$ の確率密度関数は

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

で与えられる.

- (2) $\rho = 0$ のとき, $X_1 \varepsilon_{12}$ が $N(0, 1)$ に従うことを示せ.
 (3) ε_{12} が $N(0, 1)$ に従うことを示せ.
 (4) 正の整数 k に対して, 期待値 $E\{(X_1 \varepsilon_{12})^{2k}\}$ を求めよ.
 (5) 確率変数 Z を

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i (\alpha X_i + \varepsilon_{i2})$$

と定義する. ただし $\alpha \in \mathbb{R}$ である. 期待値 $E(Z)$ と分散 $\text{Var}(Z)$ を求めよ.