令和８（２０２６）年度

広島大学一般選抜　後期日程

理学部　数学科

数　学

数学 I，数学 II，数学 III，
数学 A，数学 B，数学 C

令和 8 年 3 月 12 日

自　9 時 00 分
至　11 時 30 分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子には，数学 I，数学 II，数学 III，数学 A（図形の性質，場合の数と確率），数学 B（数列），数学 C（ベクトル，平面上の曲線と複素数平面）に関する問題が **5問** あります。総ページは **１３ ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。
3. 解答用紙は**５枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
4. 下書き用紙は**３枚**です。下書き用紙の注意書きもよく読みなさい。
5. **受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
6. 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空　白

空　白

〔１〕　次の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。

$$a_n = {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

とおくとき，$\sqrt[n]{a_n}$ を求めよ。

(2) n を自然数とする。このとき，r が $1 \leqq r \leqq n$ を満たす自然数であるならば，${}_{2n}\mathrm{C}_{r-1} < {}_{2n}\mathrm{C}_r$ であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geqq 2n + 1$$

が成り立つことを示せ。また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1}$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ を求めよ。

空　白

〔2〕 a を実数とする。$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，座標平面上の二つの曲線

$$C_1 \colon y = a\cos x, \quad C_2 \colon y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 二つの曲線 C_1 と C_2 の共有点の個数がちょうど 2 個であるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとする。二つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ。

(3) (1) で求めた範囲にある a に対して，二つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とおく。

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{V(a)}{a^2}$ を求めよ。

(ii) (i) で求めた極限値を k とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{V(a) - ka^2}{a}$ を求めよ。

空　白

〔 3 〕 次の問いに答えよ。

(1) 次の命題の真偽を判定せよ。証明も与えよ。

(i) 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ に対して，$f(x)$ が $x=0$ で連続でないならば，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

(ii) 実数全体を定義域とする関数 $g(x)$ に対して，$g(x)$ が $x=0$ で微分可能でないならば，$g(x)$ は $x=0$ で連続でない。

(2) 極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は存在し，その値は $2.71828\cdots$ であることが知られている。この値を e で表す。

a を $a>0$ かつ $a \neq 1$ を満たす実数とする。このとき，導関数の定義に従って，$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\log_a x$ の導関数を求めよ。

(3) $x>0$ を定義域とする関数 $f(x)$ であって，$x>0$ で微分可能であるものを考える。このとき，

$x>0$ で常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は $x>0$ で増加する

ことを証明せよ。ただし，次の**語群**のうちから一つ以上の用語を必ず用いよ。

語群

はさみうちの原理　　接線　　中間値の定理

平均値の定理　　合成関数の微分

(4) 座標平面上に三角形ABCが与えられたとき，原点Oを通る直線 ℓ で，三角形ABCの面積を2等分するものが存在することを示せ。ただし，実数 θ に対して，不等式 $(\cos\theta)y-(\sin\theta)x \geqq 0$ が表す領域と三角形ABCとの共通部分が空集合であるときは $S(\theta)=0$ とし，そうでないときはその共通部分の面積を $S(\theta)$ とする。このとき，$S(\theta)$ は実数全体で連続であることを用いてよい。

空　白

〔 4 〕 異なる 3 点 A, B, C があり，コインは時刻 0 において点 A に置かれている。n を 0 以上の整数とするとき，時刻 n におけるコインの位置に応じて，時刻 $n+1$ におけるコインの位置を，次の**ルール**で定める。

ルール

- 時刻 n においてコインが点 A にあれば，時刻 $n+1$ において，コインは確率 $\dfrac{2}{3}$ で点 A に，確率 $\dfrac{1}{3}$ で点 B に置かれる。
- 時刻 n においてコインが点 B にあれば，時刻 $n+1$ において，コインは確率 $\dfrac{1}{6}$ で点 A に，確率 $\dfrac{1}{6}$ で点 B に，確率 $\dfrac{2}{3}$ で点 C に置かれる。
- 時刻 n においてコインが点 C にあれば，時刻 $n+1$ において，コインは確率 $\dfrac{1}{3}$ で点 B に，確率 $\dfrac{2}{3}$ で点 C に置かれる。

自然数 n に対し，時刻 n においてコインが点 A にある確率を a_n とし，時刻 n においてコインが点 B にある確率を b_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 時刻 2 においてコインが点 C にある確率を求めよ。

(2) 等式 $a_{n+1} = ra_n + sb_n + t$ と $b_{n+1} = ua_n + vb_n + w$ がすべての自然数 n に対して成り立つような定数 r, s, t, u, v, w を求めよ。

(3) a_n, b_n をそれぞれ n の式で表せ。

(4) 時刻 3 においてコインが点 B にあったとき，時刻 2 においてコインが点 C にあった条件付き確率を求めよ。

(5) 自然数 n に対し，時刻 n においてコインが点 B にあったとき，時刻 $n-1$ においてコインが点 C にあった条件付き確率を p_n とする。極限値 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

空　白

〔5〕 次の問いに答えよ。

(1) 三角形ABCと三角形ABDは，辺ABを共有する二つの三角形であるとする。このとき，次を証明せよ。

三角形ABCの内接円と辺ABの接点Pと，三角形ABDの内接円と辺ABの接点Qとが一致するための必要十分条件は，辺の長さの関係式

$$\mathrm{AC}+\mathrm{BD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$$

が成り立つことである。

(2) 次を証明せよ。

四面体ABCDに対して，そのすべての辺と接するような球S（すなわち，四面体ABCDの6本の辺それぞれに対して，辺およびその延長との共有点がただ一つであり，さらにその共有点が辺上にあるような球S）が存在するための必要十分条件は，辺の長さの関係式

$$(*)\qquad \mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AC}+\mathrm{BD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$$

が成り立つことである。

(3) (2) の条件 $(*)$ を満たす四面体ABCDにおいて，面ABCは各辺の長さが1の正三角形であるとする。このとき，四面体ABCDのすべての辺と接する球Sの半径がとり得る値の最小値と，そのときの四面体ABCDの体積を求めよ。

空　白