

中学校 数学科 学習指導案

指導者 森脇 政泰

- 日時** 令和7年11月28日(金) 第2限 10:35~11:25
- 場所** 数学教室
- 学年・組** 中学校3年B組41人
- 単元** 三角形の課題学習
- 目標**
1. 三角形の五心それぞれの意味や性質を理解するとともに、三角形の外接円や内接円の性質を理解することができる。(知識及び技能)
 2. 相似な図形や円の性質などを用いて、平面図形の性質を考察し、問題を解決することができる。(思考力、判断力、表現力等)
 3. 三角形に関する平面図形の性質のよさを認識し活用しようとしたり、問題解決の過程を振り返って考察を深めようとしたりすることができる。
(学びに向かう力、人間性等)

指導計画 (三角形の課題学習：全4時間)

第一次 相似な図形 30時間

第二次 円 14時間

第三次 三角形の課題学習 4時間 (本時 3/4)

授業について

自ら問いをたてて、その問いを解決する学習の一環として、本時の授業を提案する。前時までに、三角形の内心、外心、重心、垂心、傍心を扱った。本時の最初の問1は「 $\triangle ABC$ の内心をIとし、3辺BC、CA、ABに関してIと対称な点をそれぞれP、Q、Rとする。 $\triangle PQR$ について、Iはどのような点ですか」である。答えは外心である。問1の設定と結論の特徴から、Iが三角形のほかの点ではどうか、という新たな問いを生徒がもちやすいことが想定される。その問いをとりあげて、問2ではIが外心、問3ではIが垂心の場合にそれぞれ取り組み、観察や予想、証明を行って解決を図っていく。問1～問3には、ほかにも関連する性質がいくつかあり、例えば問2では $\triangle ABC$ と合同な三角形の存在を予想することが考えられる。様々な問いの表出や解決を促して、主体的・自律的に学びを継続する態度の育成につなげたい。

題目 三角形の課題学習 ー内心、外心、垂心の関係ー

本時の目標

1. 相似な図形や円の性質を用いて、三角形に関する性質を考察し証明することができる。
2. 問題の設定や解決の過程、結論を振り返って、自ら問いをたてて考えようとする。

本時の評価規準 (観点/方法)

1. 中点連結定理、円周角の定理やその逆を用いて考察し証明することができる。
(思考・判断・表現/観察、ワークシート)
2. 問題や結論、図の特徴、問題どうしのつながりに着目して問いをたてようとしたり、既習事項を用いて考えようとしたりする。
(主体的に学習に取り組む態度/観察、ワークシート)

本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
(導入 5分) 内心の場合の考察	○図をかいて問1の設定を把握し、結論を予想する。	・本時で図をかくときは、作図に限定せず、分度器や生徒用 iPad を使ってもよいものとする。
<p>問1 $\triangle ABC$ の内心を I とし、3 辺 BC、CA、AB に関して I と対称な点をそれぞれ P、Q、R とする。$\triangle PQR$ について、I はどのような点ですか。</p>		
(展開 40分) 問題の解決 新たな問題を見いだす 外心の場合の考察	○内心や対称な点の性質を用いて証明する。 ○証明の概略を確認する。 ○問1の条件や結論、解決の過程を振り返って、問題を見いだす。 ○考えた問題を共有する。 ○問2の図をかいて、結論を予想する。	・予想を共有し、証明するよう促す。 ・外心や垂心の場合に絞る。
<p>問2 鋭角三角形 ABC の外心を O とし、3 辺 BC、CA、AB に関して O と対称な点をそれぞれ S、T、U とする。$\triangle STU$ について、O はどのような点ですか。</p>		
解決の見通しをもつ 問題の解決 垂心の場合の考察	○外心や対称な点の性質、中点連結定理を用いて証明を試みる。 ○証明を確認し、問1の証明との違いを把握する。 ○これまでの解決の過程をふまえて、問3の解決を図る。	・中点連結定理に気づきにくい場合は、 $\triangle ABC$ の各辺の垂直二等分線を確認する。 ・問1と問2の結論を振り返る。 ・予想を共有する。
<p>問3 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし、3 辺 BC、CA、AB に関して H と対称な点をそれぞれ X、Y、Z とする。$\triangle XYZ$ について、H はどのような点ですか。</p>		
解決の見通しをもつ 問題の解決 (まとめ 5分) 振り返りと発展	○問1や問2で用いた方法で、証明を試みる。 ○同一円周上にある4点に気づいたり、円周角の定理を用いたりして証明する。 ○証明を確認する。 ○自分たちで見つけた図形の性質と、解決の過程を振り返る。 ○感想や疑問などを書く。	・状況に応じて、同一円周上にある4点や、等しいと考えられる複数の角を全体で見つける。 ・外心や垂心の場合に絞ったときに扱わなかった問いや、疑問になったことは後日レポート課題にする。
<p>備考 ワークシート、定規、コンパス、分度器、生徒用 iPad</p>		

【資料】本時の問いについて

問1～問3

(それぞれ図1
～図3が対応)

の結論は、順に
外心、垂心、内
心です。これら
は中学校の学習
内容で証明する

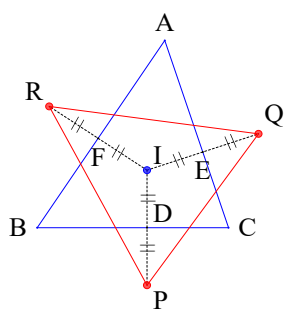


図1

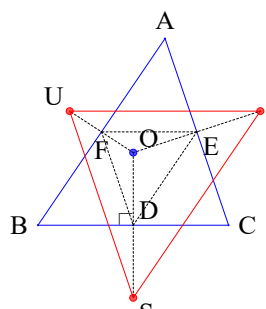


図2

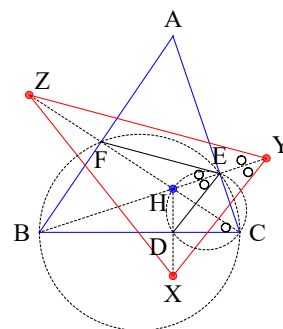


図3

ことができ、その概略 ([1]p.51) は次のようになります。

[証明の概略] 図1～図3のように、 $\triangle ABC$ の各边上に点 D、E、F をとる。

問1 内心の性質と対称な点の性質から $IP=IQ=IR$ となるので、I は $\triangle PQR$ の外心である。

問2 外心の定義から $OS \perp BC$ で、 $\triangle ABC$ と $\triangle OTU$ において中点連結定理から $BC \parallel FE \parallel UT$ より $OS \perp UT$ である。同様に $OU \perp ST$ 、 $OT \perp SU$ であるから、O は $\triangle STU$ の垂心である。

問3 垂心の定義から $\angle HDC = \angle HEC = 90^\circ$ 、 $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ で、4点 C、E、H、D と4点 B、C、E、F はそれぞれ同一円周上にある。よって、 $\angle HCD = \angle HED$ 、 $\angle HCD = \angle FCB = \angle FEB$ で $\angle HED = \angle HEF$ である。中点連結定理から $DE \parallel XY$ 、 $EF \parallel YZ$ より、 $\angle HYX = \angle HYZ$ である。同様に、 $\angle HXY = \angle HXZ$ 、 $\angle HZX = \angle HZY$ も成り立つから、H は $\triangle XYZ$ の内心である。

鈍角三角形でも問2の結論は垂心です (図4 は $\angle A$ が鈍角の場合)。証明は鋭角三角形と同様です。また、線対称について、直線 l 上の点 K に対して l に関して対称な点は K 自身であるため、直角三角形でも問2の結論は垂心です。図

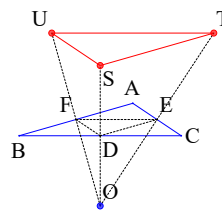


図4

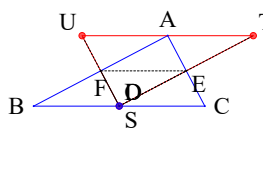


図5

5は $\angle A$ が直角のときで、O、S が斜辺 BC の中点 D に一致します。

問3の $\triangle ABC$ が鈍角三角形の場合、H は $\triangle XYZ$ の傍心の1つです。問3の $\triangle ABC$ が直角三角形の場合、垂心 H は頂点の1つに一致し、3辺または延長に関して H と対称な点のうち、2つが H と一致するため $\triangle XYZ$ は存在しません。

証明の概略から図1～図3のそれぞれの $\triangle DEF$ について、I は外心、O は垂心、H は内心です。問3の $\triangle DEF$ は垂足三角形と呼ばれ、最短の折れ線に関連する性質 ([2]p.106、[3]pp.8-9) などが知られています。

参考文献

- [1] 景山三平ほか編著、平成30年改訂版学習指導要領 高等学校数学科の新教材&授業プラン、明治図書、2019、pp.50-52
- [2] 笹部貞市郎、問題解法 幾何学辞典 第2版、聖文社、1976
- [3] 難波誠、平面図形の幾何学、現代数学社、2008

実践上の留意点

三角形の課題学習として、前時までに三角形の五心（内心、外心、重心、垂心、傍心）を扱いました。内心、外心、重心は高等学校の数学 A で扱われますが、中学校では五心は発展的な内容のため、内心と傍心は角の二等分線の作図、外心は線分の垂直二等分線の作図、重心は平行線と相似、垂心は三平方の定理と関連させて扱うなど、中学校の既習事項と結びつけることに留意しました。

問 1（【資料】図 1）は、証明に用いる補助線や図形の性質が少ないため、自己解決がしやすいと考えます。授業では、対称な点の性質（ $ID=DP$ など）について授業者はあまり言及しませんでした。が、 $ID=IE=IF$ でないときも $ID=DP$ などが成り立つことをおさえると、問 2 や問 3 で中点連結定理を用いることに気づきやすくなるかもしれません。

問 2（【資料】図 2）の証明が停滞する場合は、手立ての 1 つとして、仮定と予想を振り返って、証明に必要な図形の性質を調べるような展開が考えられます。例えば、 $OS \perp UT$ を示すために、もともと OS と垂直な直線（線分）はないか尋ねて、外心の定義から $OS \perp BC$ を確認し、 BC と UT の位置関係を尋ねて $BC \parallel FE \parallel UT$ を見いだしてから証明に取り組むような展開です。

問 3（【資料】図 3）の証明が停滞する場合、予想から $\angle H Y X = \angle H Y Z$ と $\angle H E D = \angle H E F$ を導き、垂心の定義から 4 点 C, E, H, D が同一円周上にあつて $\angle H E D = \angle H C D$ であることを全体で確認するとよいかもしれません。その後は、 $\angle H E D = \angle H C D$ の道筋を振り返りながら、 $\angle H E F (\angle B E F) = \angle H C D (\angle F C B)$ を示すことを促すような展開が考えられます。

本時は 1 時間で問 1～問 3 を扱う計画で実施しました。問 1 を解決した後は、仮定と結論に着目して素朴に新たな問題を見いだすよう促し、この時点では発散しすぎることがないようにしました。自由度を高くして問題を考えるのは、問 3 を解決した後の予定でした。本時の展開とは別に、扱う問題を問 1 や問 2 までにとどめたり、問ごとに様々な問題を見いだし調べたりするような学習指導過程も考えられます。

見いだされる問題や図形の性質には、以下のようなものが想定されます。

問 1 の後 I が外心などではどうなるか。

$(\Delta PQR \text{ の外接円の半径}) = 2 \times (\Delta ABC \text{ の内接円の半径})$ である。

六角形 $ARBPQC$ にはどのような特徴があるか。（問 2、問 3 も同様）

問 2 の後 O が垂心の場合はどうなるか。

鋭角三角形でない場合はどうなるか。（問 3 も同様）

$\Delta ABC \equiv \Delta STU$ ではないか。

$\Delta DEF \sim \Delta STU$ で相似比は 1:2、相似の中心は O である。（問 1、問 3 も同様）

問 3 の後 H が重心や傍心の場合はどうなるか。

問 1 の ΔPQR に対して問 2 の 3 点 S, T, U をとり、 ΔSTU に対して問 3 の 3 点 X, Y, Z をとることができたとき、 X, Y, Z はもとの A, B, C であるか。

この他に、多角形の重心や四面体の内心は存在するか、といった問題も挙がるかもしれません。

問題を見いだした後は、共有し議論する時間を設けて解答例や反例を確認するとともに、解決の過程や問題どうしのつながりなどにも着目して、これまでの学習の振り返りや新たな問題に気がつくような交流を促す展開が考えられます。