

【解答】

[I] 力学

(1)

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$
$$V_1 = mgy + \frac{1}{2}ky^2$$

(2)

$$L_1 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy - \frac{1}{2}ky^2$$

(3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{y}}\right) = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial y} = -mg - ky$$

オイラー・ラグランジュ方程式に代入して整理する.

$$m\ddot{y} + ky = -mg$$

(4)

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{P}(t)^2$$
$$V_2 = mgy + \frac{1}{2}k(y - P(t))^2 + MgP(t)$$

(5)

$\dot{y} = \dot{\eta} + \dot{P}(t)$ を代入する。

$$L_2 = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + m\dot{P}(t)\dot{\eta} - mg\eta - \frac{1}{2}k\eta^2 + \left[\frac{1}{2}(m + M)\dot{P}(t)^2 - (m + M)gP(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + mA\omega \cos(\omega t) \dot{\eta} - mg\eta - \frac{1}{2}k\eta^2 \\ + \left[\frac{1}{2}(m+M)A^2\omega^2 \cos^2(\omega t) - (m+M)g(P_0 + A \sin(\omega t)) \right]$$

(6)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\eta}} \right) = m\ddot{\eta} + m\ddot{P}(t), \quad \frac{\partial L_2}{\partial \eta} = -mg - k\eta$$

オイラー・ラグランジュ方程式に代入して整理する.

$$m\ddot{\eta} + k\eta = -mg - m\ddot{P}(t)$$

$$\ddot{\eta} + \frac{k}{m}\eta = -g - \ddot{P}(t)$$

(7) (6) の運動方程式に, 特殊解を代入すると $\ddot{\eta} = -C\omega^2 \sin(\omega t)$ となる。

外部駆動 による慣性力 ($-\ddot{P}(t)$) は $A\omega^2 \sin(\omega t)$ となり, 運動方程式は以下となる。

$$-C\omega^2 \sin(\omega t) + \frac{k}{m}(B + C \sin(\omega t)) = -g + A\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$\frac{k}{m}B + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) C \sin(\omega t) = -g + A\omega^2 \sin(\omega t)$$

これから、時間 t に依存しない項と依存する項から、

定数 $B = -\frac{mg}{k}$, C は $\frac{A\omega^2}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}$ となる。

[Ⅱ] 電磁気学

1.

- (1) 電場 $E(r)$ に関するガウスの法則より, $a \leq r \leq b$ において $4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = Q$ である.
よって,

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- (2) 電場 $E(r)$ と静電ポテンシャル $\varphi(r)$ は, $E(r) = -\text{grad } \varphi(r)$ であるので,

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + k$$

k は任意の定数。内球と外球の表面の静電ポテンシャルはそれぞれ,

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a} + k$$

$$\varphi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b} + k$$

となる。よって, これらの差をとって, 電位差 V は

$$V = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

- (3) 静電容量 C を用いて, $Q = CV$ であるので,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

となる。

- (4) 球殻の静電ポテンシャルはゼロであるので,

$$\varphi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b} + k = 0 \rightarrow k = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b}$$

したがって、 $a < r < b$ では、

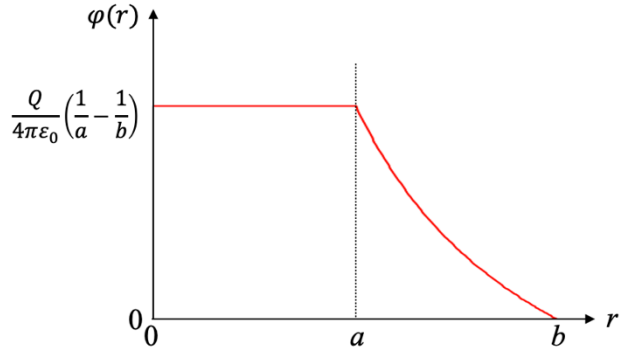
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

一方、導体球内部の $0 \leq r \leq a$ では電場がゼロであるので、

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

の一定値をとる。

以上をまとめて、右図のグラフになる。



2.

(1) 静電場 $\vec{E}_0$ による位置 $\vec{r}$ での静電ポテンシャル φ_0 は、

$$\varphi_0 = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}.$$

(2) 導体球の表面の位置ベクトルを $\vec{r}_1$ とする。 $\vec{r}_1$ での静電ポテンシャル $\varphi_1(\vec{r}_1)$ はゼロであるので (原点 O の静電ポテンシャルと等しい),

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{r}_1) &= \varphi_0(\vec{r}_1) + \varphi(\vec{r}_1) \\ &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_1}{a^3} = \left(-\vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{a^3} \right) \cdot \vec{r}_1 = 0 \end{aligned}$$

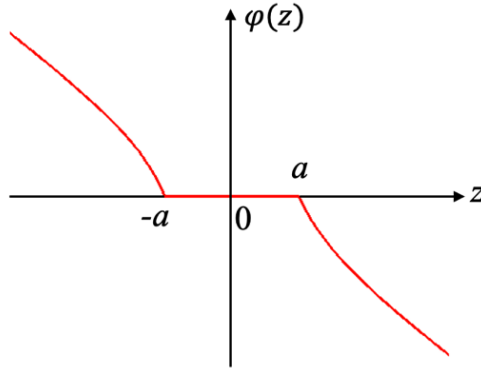
よって、電気双極子は

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_0.$$

(3) 導体球の外側の静電ポテンシャル $\varphi_2(\vec{r})$ は、

$$\begin{aligned} \varphi_2(\vec{r}) &= \varphi_0(\vec{r}) + \varphi(\vec{r}) \\ &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \\ &= -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right). \end{aligned}$$

- (4) 導体球の内部の静電ポテンシャルはゼロであるので, (3)の結果より, 以下のグラフに



- (5) 電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は, $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_2(\vec{r})$ から求める.

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \text{grad}(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \text{grad} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \\ &= \vec{E}_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \frac{3a^3}{r^5} \vec{r} \\ &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \vec{E}_0 + \frac{3a^3(\vec{E}_0 \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r}.\end{aligned}$$

[Ⅲ] 量子力学

- (1) 定常1次元のシュレーディンガー方程式に与えられたポテンシャルを代入することで以下が得られる.

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_1(x) &= E \Psi_1(x) & (x < 0) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2(x) &= (E + V_0) \Psi_2(x) & (0 \leq x \leq a) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_3(x) &= E \Psi_3(x) & (x > a)\end{aligned}$$

- (2) 入射波は x 軸の負の方向からのみであり, かつ領域 $x > a$ ではポテンシャルは常に一定であることから, この領域には反射波は存在しないため.

- (3) (2) の一般解 $\Psi_2(x)$ を (1) で得たシュレーディンガー方程式に代入する

ことで以下が得られる.

$$k' = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$$

(4) 波動関数が連続であれば, シュレーディンガー方程式を1回積分した

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int (E - V) \Psi dx$$

がポテンシャル V が有限である限り連続であるため.

(5) (2) の一般解を (4) の境界条件に代入することで以下が得られる.

$$\begin{aligned} A + B &= C + D \\ k(A - B) &= k'(C - D) \\ Ce^{ik'a} + De^{-ik'a} &= Fe^{ika} \\ k'(Ce^{ik'a} - De^{-ik'a}) &= kFe^{ika} \end{aligned}$$

(6) (5) で得た関係式を連立方程式として B, C, D を消去することで得られる.

(7) 完全透過の条件は以下である.

$$\left(\frac{k^2 - k'^2}{2kk'}\right)^2 \sin^2 k'a = 0 \quad \rightarrow \quad k'a = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

[IV] 熱統計力学

$$(1) \quad n_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{\ell}{a}\right), \quad n_- = \frac{1}{2}\left(N - \frac{\ell}{a}\right)$$

$$(2) \quad \Omega(\ell) = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}\left(N + \frac{\ell}{a}\right)\right]! \left[\frac{1}{2}\left(N - \frac{\ell}{a}\right)\right]!}$$

$$(3) \quad S(\ell) \simeq k_B \left[N \log N - \frac{1}{2}\left(N + \frac{\ell}{a}\right) \log \frac{1}{2}\left(N + \frac{\ell}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(N - \frac{\ell}{a}\right) \log \frac{1}{2}\left(N - \frac{\ell}{a}\right) \right]$$

$$(4) \quad S(\ell) \simeq Nk_B \log 2 - \frac{k_B}{2Na^2} \ell^2$$

(5) (4)の結果から,

$$S(\ell) \simeq Nk_B \log 2 - \frac{k_B}{2Na^2} \ell^2$$

である. また $U = U(T)$ だから,

$$F = U - TS \simeq U(T) - TNk_B \log 2 + \frac{k_B T}{2Na^2} \ell^2$$

となる。よって

$$X = \left(\frac{\partial F}{\partial \ell} \right)_T = \frac{k_B T}{Na^2} \ell$$

である。これは

$$X = A(\ell)T$$

の形であり、

$$A(\ell) = \frac{k_B}{Na^2} \ell$$

であることから、 $A(\ell) > 0$ である。

(6) (5)より、

$$X = \frac{k_B T}{Na^2} \ell$$

であることから、張力 X を一定のもとで温度を上げると、長さは縮む。