広島大学大学院先進理工系科学研究科
数学プログラム入学試験(2026 年度 8 月実施)専門科目問題
出題の意図

この試験は，専門科目に関する基礎知識及び理解力・考察力・表現力を見るために記述式の問題を出題しており，様々な解答が可能です．計算を主体とする問題についても，評価の際には結果に至るまでの考え方や手順を重視しています．さらに，いずれの問題も学部段階での基礎的な内容を扱っており，試験後に各自で検討することによって，十分に理解を深めていただけるのではないかと考えております．

そこで，ここでは解答例に代えて各問についての解説を述べます．

[1] 線形代数学における基礎的な概念（固有値と固有空間，対角化，線型写像の表現行列，核と像，線型空間の基底など）を理解し，使いこなせるかどうかを見る問題です．

[2] 微積分学における基礎的な概念（数列の収束，関数の連続性，図形の面積，極限値など）を理解し，使いこなせるかどうかを見る問題です．

[3]-[I] 位相幾何学における基礎的な概念（位相同型，写像の連続性，商空間，コンパクト性，ハウスドルフ性など）を理解し，使いこなせるかどうかを見る問題です．

[3]-[II] 確率・統計学における基礎的な概念（確率変数，分布，独立性，特性関数，条件付き期待値，不偏推定量，分散など）を理解し，使いこなせるかどうかを見る問題です．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和８年８月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答した.

[**1**] 計算によって最終的な答えを導き出す問題なので，計算結果のみの記載とする．解答は他の表現もあり得る．なお，採点においては最終的な答えのみではなく，そこに至るまでの論証も重視した.

(A) (1) 固有値は 1 および -1 (重解). 対応する固有ベクトルは

$$c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{および} \quad c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

ただし c, c_1, c_2 は任意定数である.

(2) 対角化可能である.

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-3\end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(3) $A^{999}=A$.

(B) (1) $\dim \mathrm{Ker} f=2$, $\dim \mathrm{Im} f=2$.

(2) $\mathrm{Ker} f$ の基底は, 例えば

$$\left\{\begin{pmatrix}9\\1\\-9\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-9\\4\\0\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

$\mathrm{Im} f$ の基底は, 例えば

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和８年８月実施

[2 略解]

次の (A), (B) のすべての問に答えた.

(A) (1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するので, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ とする. f は $x=\alpha$ で連続なので,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x-\alpha| < \delta \implies |f(x)-f(\alpha)| < \varepsilon.$$

また, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \delta.$$

故に, $n \geq N$ のとき, $|f(a_n)-f(\alpha)| < \varepsilon$. よって, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ が成り立つ.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

$n > N$ のとき,

$$\begin{aligned} |b_n - \alpha| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |a_k - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |a_k - \alpha| + \left(1 - \frac{N}{n}\right)\varepsilon. \end{aligned}$$

故に,

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n - \alpha| \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成り立つ.

(B) (1) 極座標変換より,

$$S_2 = \iint_{D_n} dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

(2) 2 点 $(0,1), (2^{-\frac{1}{n}}, 2^{-\frac{1}{n}})$ を結ぶ線分は

$$y = (1 - 2^{\frac{1}{n}})x + 1 \quad (0 \leq x \leq 2^{-\frac{1}{n}}).$$

従って, $0 \leq x \leq 2^{-\frac{1}{n}}$ に対して, $(1-2^{\frac{1}{n}})x + 1 \geq x$ と

$$(1 - 2^{\frac{1}{n}})x + 1 \leq (1 - x^n)^{\frac{1}{n}} \qquad (\star)$$

を示せばよい. 前者は $2^{\frac{1}{n}} x \leq 1$ より成立. 後者を示すために

$$f(x) = (1-x^n)^{\frac{1}{n}} - (1 - 2^{\frac{1}{n}})x - 1$$

とおく．$n=1$ では $f(x)=0$ なので $(\star)$ は成立する．

以下，$n \geq 2$ とする．

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{n-1}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-1} - 1 + 2^{\frac{1}{n}}, \\ f''(x) &= -(n-1)x^{n-2}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-1} - (n-1)x^{2n-2}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-2} \\ &= -(n-1)x^{n-2}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-2}. \end{aligned}$$

$0 < x < 2^{-\frac{1}{n}}$ のとき，$f''(x) < 0$. また，$n \geq 2$ なので，

$$f'(0) = -1 + 2^{\frac{1}{n}} > 0, \quad f'(2^{-\frac{1}{n}}) = -2 + 2^{\frac{1}{n}} < 0.$$

故に，f は $x = 0, 2^{-\frac{1}{n}}$ で最小値 0 をとる．よって，$(\star)$ が成り立つ．

[(2) の別解] $g(x) = (1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ とおく．

$$g'(x) = -x^{n-1}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-1}, \quad g''(x) = -(n-1)x^{n-2}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-2}$$

なので，区間 $[0, 2^{-\frac{1}{n}}]$ において $g'' \leq 0$. 従って，g は上に凸であり，$y = g(x)$ のグラフは 2 点 $(0, g(0))$, $(2^{-\frac{1}{n}}, g(2^{-\frac{1}{n}}))$ を結ぶ線分の上側にある．

(3) $D_n \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ なので，$S_n \leq \dfrac{1}{2}$. また，

$$E_n := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq (1-2^{\frac{1}{n}})x + 1\right\}$$

とおく．(2) より，$E_n \subset D_n$. E_n の面積を T_n とおけば，$T_n \leq S_n$. ここで，

$$T_n = \iint_{E_n} dxdy = \int_0^{2^{-\frac{1}{n}}} \left(-2^{\frac{1}{n}}x + 1\right)dx = -\frac{1}{2}2^{-\frac{1}{n}} + 2^{-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和８年８月実施

[**3 略解**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えた.

(I) (A) (1) 位相同型である. 写像 $f\colon \mathbb{R} \to I$ を $x \mapsto e^x$ と定め, 写像 $g\colon I \to \mathbb{R}$ を $y \mapsto \log y$ と定めると, f と g はともに連続な全単射で, 互いの逆写像になっている.

(2) 位相同型でない. 背理法により証明する. 位相同型 $h\colon J \to \mathbb{R}$ が存在するとする. h は $J \setminus \{0\}$ から $\mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ への位相同型を定めるが, $J \setminus \{0\}$ が弧状連結であるのに対し, $\mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ は決して弧状連結とはなり得ない. よって矛盾である.

(B) T の閉集合全体のなす族は

$$\mathcal{C} := \{\, \emptyset,\ T,\ \{s\} \,\}$$

である. $f\colon T \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $\mathbb{R}$ の閉集合 $S := \{f(\eta)\}$ を考える. S の逆像は η を元として含む T の閉集合であるが, これは T しかない. よって $f(s) = f(\eta)$ が成立する.

(C) 以下, 自然な射影を $\pi_Y\colon X \to Y$, $\pi_Z\colon X \to Z$ とおく.

(1) コンパクトである. 証明. S^1 を X の部分空間として埋め込まれた, 原点を中心とする単位円 $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ とする. 埋め込み $i\colon S^1 \hookrightarrow X$ と $\pi_Y\colon X \to Y$ の合成は S^1 から Y への全射連続写像である. S^1 はコンパクトであるから Y もコンパクトである.

(2) コンパクトでない. 証明. 連続写像 $p\colon X \to \mathbb{R}$ を $(x,y) \mapsto xy$ により定めると, ある連続写像 $\bar{p}\colon Z \to \mathbb{R}$ が存在して $p = \bar{p} \circ \pi_Z$ となる. p は全射なので $\bar{p}$ も全射である. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトでなくてはいけないので, Z がコンパクトなら $\mathbb{R}$ もコンパクトとなるが, $\mathbb{R}$ はコンパクトではない. よって Z はコンパクトではない.

(3) ハウスドルフでない. 証明. 2 点 $P := (1,0) \in X$ と $Q := (0,1) \in X$ を考える. $\pi_Z(P) \neq \pi_Z(Q)$ である. $U_P \subset Z$ を $\pi_Z(P) \in Z$ の開近傍, $U_Q \subset Z$ を $\pi_Z(Q) \in Z$ の開近傍とする. $\pi_Z^{-1}(U_P)$ は P を含む X の開集合であり, $\pi_Z^{-1}(U_Q)$ は Q を含む X の開集合である. 従って, 正の実数 ε を十分小さくとれば, $P' := (1,\varepsilon) \in \pi_Z^{-1}(U_P)$, $Q' := (\varepsilon,1) \in \pi_Z^{-1}(U_Q)$ が成立する. よって $\pi_Z(P') \in U_P$, $\pi_Z(Q') \in U_Q$ となる. しかるに $\pi_Z(P') = \pi_Z(Q')$ より $U_P \cap U_Q \neq \emptyset$ となる. よって Z の相異なる 2 点 $\pi_Z(P)$ と $\pi_Z(Q)$ を開集合により分離することはできない.

(II) (1) X_j $(j=1,2,3)$ の特性関数は

$$\mathrm{E}[e^{itX_j}] = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}(e^{it})^k = e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$
$$\mathrm{E}[e^{itT}] = \mathrm{E}[e^{itX_1}e^{itX_2}e^{itX_3}] = \{e^{\lambda(e^{it}-1)}\}^3 = e^{3\lambda(e^{it}-1)}$$

T の特性関数は $e^{3\lambda(e^{it}-1)}$ であり, したがってパラメータ 3λ のポアソン分布であるから確率 $P(T=k)$ は

$$\begin{cases} e^{-3\lambda}\dfrac{(3\lambda)^k}{k!} & (k=0,1,\ldots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(2) X_1, X_2, X_3 は同じ分布に従うから,

$$\mathrm{E}[X_1|T=t] = \mathrm{E}[X_2|T=t] = \mathrm{E}[X_3|T=t]$$

が成り立つ. 一方

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[X_1|T=t] + \mathrm{E}[X_2|T=t] + \mathrm{E}[X_3|T=t] \\ &\quad = \mathrm{E}[(X_1+X_2+X_3)|T=t] = \mathrm{E}[T|T=t] = t\end{aligned}$$

となることから

$$\mathrm{E}[X_1|T=t] = \mathrm{E}[X_2|T=t] = \mathrm{E}[X_3|T=t] = \frac{t}{3}$$

である.

(3)

$$\mathrm{E}[X_1] = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda$$

であるから

$$\mathrm{E}[c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3] = (c_1+c_2+c_3)\lambda$$

したがって, 不偏推定量となるための条件は $c_1+c_2+c_3=1$ である.

(4) $\mathrm{E}[Y_c|T] = \sum_{j=1}^{3}c_j\mathrm{E}[X_j|T] = \sum_{j=1}^{3}c_j\frac{T}{3}$ となるが, $\sum_{j=1}^{3}c_j=1$ より $Z = \frac{T}{3} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

(5) $Z = Y_{(1/3,1/3,1/3)}$ であるから不偏推定量である.

(6)

$$\mathrm{E}[X_1(X_1-1)] = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+2}}{k!} = \lambda^2$$

より，

$$\mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{E}[X_1^2] - (\mathrm{E}[X_1])^2 = \mathrm{E}[X_1(X_1-1)+X_1] - (\mathrm{E}[X_1])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

したがって

$$\mathrm{Var}[Y_{\boldsymbol{c}}] = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\lambda = (\boldsymbol{c}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{c})\lambda$$

である．$\mathbf{1} = (1,1,1)$ とするとシュワルツの不等式より

$$1 = (\mathbf{1}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{c})^2 \leq (\mathbf{1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{1})(\boldsymbol{c}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{c}) = 3(\boldsymbol{c}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{c}) \quad (\text{等号は } \boldsymbol{c} = (1/3, 1/3, 1/3))$$

より，$\mathrm{Var}[Z] = \mathrm{Var}[Y_{(1/3,1/3,1/3)}] \leq \mathrm{Var}[Y_{\boldsymbol{c}}]$.