

算数・数学科

熊野 めぐみ・松島 充・川口 知佐子
番本 充俊・河寄 祐子・天野 秀樹

I 昨年度までの研究

広島大学附属東雲小学校・中学校では、平成 22 年度より「9年間の学びのつながりを意識した授業」をテーマとして研究を行ってきた。算数・数学科ではこれまで、図形領域における学習材を開発する視点を提案した。また、昨年度からは、関数学習における研究を進めてきた（広島大学附属東雲小学校・中学校，2011，2012，2013）。なお、本校における関数学習とは、算数科の数量関係領域や数学科の関数領域のみにしぼられる学習内容ではなく、関数の考えを用いて算数・数学の学習が進められる学習内容すべてを対象としている。

これまで本校では、関数の考えの数学的要素を「集合，順序，変化，対応」の4つと規定し、「関数学習における数学的な内容の相」を設定した（広島大学附属東雲小学校・中学校，2013）。そして、その相が子どもたちに現れるような関数学習のあり方を目指すための実践研究を行ってきた〔註1〕。「関数学習における数学的な内容の相」を表1に、昨年度までの成果を表2に示す。

表1 関数学習における数学的な内容の相

相①.	日常の事象の中から「集合」を見いだしたり、「順序」関係を見いだしたりする。
相②.	相①の関係について考え、表現したりその考えを深めたりする。
相③.	日常の事象の中にある二つの数量の関係を見だし、「変化」の様子に着目して考え、表現したりその考えを深めたりする。
相④.	相③の関係について見通しをもち筋道を立てて考え、表現したりその考えを深めたりする。
相⑤.	日常の事象の中にある二つの数量の関係を見だし、「対応」の様子に着目して考え、表現したりその考えを深めたりする。
相⑥.	相⑤の関係について見通しをもち筋道を立てて考え、表現したりその考えを深めたりする。
相⑦.	日常の事象の中にある二つの数量の関係を見だし、「変化」や「対応」の様子に着目して考え、見通しをもって考えたり表現したりする。
相⑧.	日常の事象の中にある二つの数量の関係を見だし、「変化」や「対応」の様子、活用の仕方に着目して、数学的な推論の方法を用いて論理的に考えたり、表現したり、その過程をふり返って考えを深めたりする。

〔註1〕 関数学習における数学的な内容の相

ここでの「相」とは、相があがればもうさがることはないという一方向的な階段状のモデルではなく、子どもの発達の側面を示した相であり、相③から相①へ戻ったり、相③から相⑥へ跳んだりする再帰的・超越的な学習の相である。例えば、小学1年時でも対応の様子に着目することはあるし、中学3年時でも日常の事象から集合を見いだすこともある。

この関数学習における数学的な内容の相は、関数の考えの数学的要素を学習する相とそれらの関数の考えの要素を学習対象とする相が順に生じるように作成した。それは、子どもの内面に一度位置づいた関数の概念は、次第に子どもに利用されるようになり、最後はあたかも数学的な実体をもっているのかのように子どもに捉えられていくと考えるからである。数学的な概念について Sfard (1991) は、操作的概念と構造的な概念の2つが相補的にあるとしている。本校では、関数の考えの数学的要素を学習する相を操作的概念に、それらを学習対象とした学習の相を構造的な概念に対応させて考えている。

表2 昨年度までの実践研究の成果

I 期		積一定の反比例の式、積を変化させる比例の式を順序よく並べる問題づくりの活動を通して、小学校3年生が□の変数性に気づくことができることを実証し、変数の概念理解の素地を築いた。 また、2つの数量の変わり方のきまりを見つける活動を通して、そのきまりを表や図、式に表すことで、小学校3年生が2つの数量を対応させて考えられることを実証した。
II 期	前半	変化の様子と対応の様子に着目して問題を解決する活動を通して、数量の関係を見つける視点を身につけられることを実証した。このことは、論理的な考察、表現への素地になる。
	後半	x の増加に対する y の増減(例： x が1ずつ増えるにつれて y はだんだん少なくなる)に着目した考えを身につけられることを実証した。その際、曲線の微小区間の傾きに着目した考えは、高等学校での微分係数の考えへの素地になる。
III 期		現実の事象から数学化し、関数の考えを用いて数学内で解決し、現実の事象に適応させる一連の問題解決のサイクルを行うことで、1次関数や2乗に比例する関数の対応の様子を身につけられること、関数の考えの有用性を感じることを、関数の考えの活用方法を獲得できることを実証した。

昨年度の主な課題としては、関数の考えの「活用」について、詳細な分析ができなかったことがあげられる。

II 今年度の取り組み

1 関数学習における「活用」

今年度は昨年度の課題をもとに、関数の考えを活用することに重点をおいた実践を進めていく。日常の事象を考察しようとするアイデアや手法を子どもに身につけさせるうえで、集合・順序・変化・対応の考えを活用することが重要である(中島, 1981)。「活用」は、現実の世界の問題を算数・数学の世界の問題に変換した後に、算数・数学の世界で解決し、それが現実の世界の問題の解としてふさわしければ問題が解決されたとする一連の学習サイクルの中で用いられる。このサイクルは、数学的モデル化過程(西村, 2012)といえ、現実の世界と数学の世界を水平的に行き来し、数学の世界内で垂直的に創造的活動を繰り返すサイクルとして示されている(島田, 1977; OECD, 2004)。

関数学習における活用に重点をおいて指導する意義は、次の3つである。

第一に、社会の要請である。平成25年6月に閣議決定された教育振興基本計画によれば、わが国に求められるものは、自立・協働・創造に向けた一人ひとりの主体的な学びであるとしている。そのうえでわが国の義務教育段階における課題の一つに、獲得した情報の関係性を理解して解釈したり、自らの知識や経験と結びつけたりすることがあげられている。この課題は、日常の事象から問題を見だし、それを数学の視点から解決し、その結果を解釈して問題解決に役立てようとする数学的モデル化過程と密接に関係している。したがって、関数学習での活用の重視は、今後わが国で求められる教育の方向性と軌を一にしていると考えられるからである。

第二に、算数・数学の特性である。算数・数学には、数学的な内容や理論の面と数学的な方法や応用の面の両面があり、算数・数学的知識の充実とその知識を活用することが相互に支え合う関係にあるとき、算数・数学の学びが発展すると考えられる(布川, 2013)。算数・数学の学びを深めていくうえで両者は欠かせない側面であり、数学的な方法や応用を重視する数学的モデル化過程を指導する意義は十分にあると考えられるからである。

第三に、生徒の実態である。全国学力・学習状況調査では、知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や、様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力が不十分であると捉え、主として「活用」に関する問題(いわゆる、B問題)を実施している(国立教育政策研究所, 2014)。実際に、本校の中学校第3学年において昨年度、関数領域で全国平均を下回る問題が1問あり、関数学習の活用を重視する必要があると考えられるからである。

2 関数学習における「活用」モデル

関数学習における活用に重点をおいた実践を行い、子どもたちの学習の相をより詳細に捉えて、すべての子どもがより高い相へ移行できるようにするために、関数学習における「活用」モデルを図1のように作成した〔註2〕。

このモデルを利用することで、子どもたちが「何を」活用するのかを明らかにするとともに、活用できる力を高めしていく。実際には、学習内容における活用サイクルの位置づけやそれを支える意識や考えを明らかにして実践する。

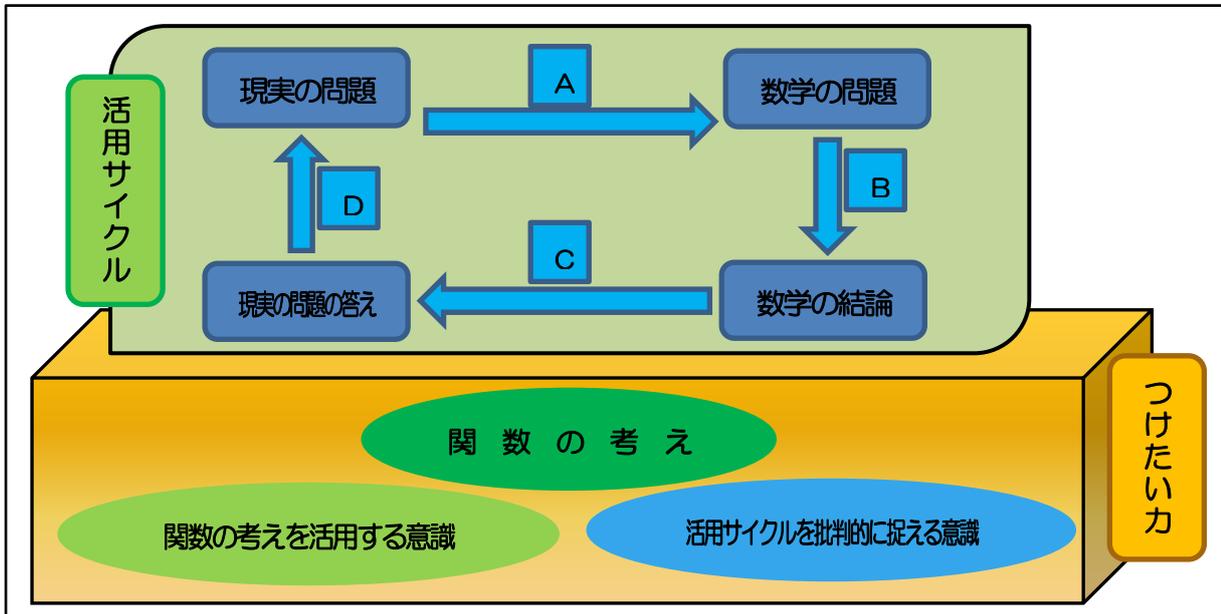


図1 関数学習における「活用」モデル

例えば、この「活用」モデルの具体について「新幹線の金属疲労を探究する学習（中学校第3学年：いろいろな関数）」で示す。この学習は、ある生徒が新幹線に乗りしてトンネルを通過したときに、「ドーン」と音が変わることに疑問を抱いたことから始まる。そして新聞記事から、新幹線とトンネルのすれ違う面積などの圧力の影響により、新幹線に金属疲労が起こるという問題があることを知る。そこで、新幹線とトンネルの一部がすれ違う面積を調べる数学的な問題を設定し、グラフに表しながら時間の推移にもなるとすれ違う面積の変容を調査する、という学習である。

この学習と活用サイクルを対応させてみる。新幹線の金属疲労といった「現実の問題」に対して、新幹線とトンネルの一部がすれ違う面積を調べるといった「数学の問題」を生徒が設定する。そして、その設定した問題を、グラフに表しながら「数学の結論」を導き出し、その結論が「現実の問題の答え」にどう影響しているかを検討する学習である。次にモデルを支える意識や考えと対応させてみる。時間の推移にもなるとすれ違う面積を調べる際に、関数の考えの数学的要素としては、変化や対応の考えが影響している。また、トンネルを補修した新聞記事から社会問題を見だし、その解決の可能性から新幹線とトンネルのすれ違う面積を調べようとするのは、関数の考えを活用する意識が影響している。

このように関数学習における「活用」モデルは、子どもが学習の中で何を活用するのか、そしてその活用の様相はどうなっているのかを明らかにできる。またそれと同時に、授業者が関数学習における授業をどのようにデザインしていけばよいかの指針をも与えている。したがって、関数学習における「活用」モデルを用いた実践研究は、子どもたちに関数の考え、関数の考えを活用する意識、活用サイクルを批判的に捉える意識を育成する授業の実現につながると考える。

〔註2〕 関数学習における「活用」モデル

モデルは、OECD（2004）の数学化サイクルを基本に作成した。また、このモデルを支える「関数の考え」には、例えば、パターンを使う、分類する、Aが決まればBが決まると考える、最大・最小を探そうとすることや仮定を設定する、変数を見いだす、変数の条件を設定する、近似して見る、抽象化する、予測・測定する、仮定・仮説を修正することなどがあげられる（片桐、1988；島田、1977；三輪、1983；Wild & Pfannkuch、1999；池田、2004；長崎、2001；西村、2012）。さらに、「関数の考えを活用する意識」や「モデルを批判的に捉える意識」（西村、2012；Kaiser&Sriraman、2006）も、このモデルを支える側面として設定した。

3 研究の目的

I 期, II 期, III 期それぞれの関数学習の具体的な指導法と, 「活用」モデルを軸とした関数学習における授業のつくり方を提案する。

4 研究の方法

- (1) 文献研究及び学習指導要領の記載を検討し, 関数学習における数学的な内容の相(表1)を設定する。
- (2) 文献研究や大学との共同研究により, 関数学習における「活用」モデル(図1)を設定する。
- (3) 関数の考え, 関数の考えを活用する意識, 活用サイクルを批判的に捉える意識を高めるための事例研究を行う。

5 現在までの研究

各期における今年度の現在までの研究を表3, 表4, 表5に示す。「関数の考えの数学的な内容」の列は, 各授業を通して目指す関数の考えの数学的内容を示している。この内容は表1「関数学習における数学的な内容の相」と対応している。「活用サイクル」の列は, 図1における活用サイクルの4種の矢印のどこに焦点を当てた授業実践かを示している。「授業のつくり方」の列は, 上段と下段に分かれている。下段は本研究発表会本時に固有な活用サイクルを用いた具体的な手立てと育てたい子どもの姿を示している。上段は単元に固有な活用サイクルを用いた具体的な手立てと育てたい子どもの姿を示している。上段は下段よりも一段階抽象的に記述している。これは, 多種多様な実態をもった全国の教室においても, 「活用」モデルを軸とした関数学習が実現できるようにするためである。

表3 関数学習の具体的な指導法と「活用」モデルを軸とした授業のつくり方 (I 期)

時 期	授 業 の つ くり 方	活 用 サイクル	関数の考えの 数学的な内容
小学校 第2学年	単元「かけ算」<数と計算 領域> 身近な問題をもとに乗法の必要性を考えて数学の問題を設定し, 乗法の意味や乗法九九をもとに考察することを通して, 身近な問題を解決する考えを深められるようにする。	A B C	相① 相② 相③
	[本時] 題材「かけ算: 乗法九九の利用」 乗法の交換法則や分配法則等の乗法九九のきまりをもとに九九表を20段まで広げる活動を設定することで, 乗法九九のきまりについて考え表現し, その考えを深められるようにする。		
小学校 第4学年	単元「ともなって変わる量」<数量関係 領域> 身のまわりの問題から数学の問題を設定し, 変化の関係について筋道立てて考え, 表現したりその考えを深めたりすることで, 活用サイクルを批判的に捉える意識を高める。	A B D	相③ 相④
	[本時] 題材「ともなって変わる2量の仮定」 線香を燃やすときの時間と長さの関係の前提になる仮定を考える活動を設定することで, 仮定と数学の結論との関係について考え, 表現したりそのことから考えを深めたりできるようにする。		

表4 関数学習の具体的な指導法と「活用」モデルを軸とした授業のつくり方（Ⅱ期）

時 期	授 業 の つ くり 方	活用 サイクル	関数の考えの 数学的な内容
小学校 複式高学年	<p>単元「比例」（5年）及び「比例と反比例」（6年）＜数量関係 領域＞</p> <p>ともなって変わる2量を変化や対応の考えを活用して、その関係を考察して結論づけ、身近な事象につなげる活動を設定することで、比例や反比例における関数の考えを活用する意識を高める。</p>	B C	相⑤ 相⑥ 相⑦
	<p>[本時] 題材「比例の導入」（第5学年）及び題材「反比例の導入」（第6学年）</p> <p>式から表などを作って2量の関係を考察して比例や反比例を知り、身近な事象につなげる活動を設定することで、変化や対応の考えを活用して、自分なりに見通しをもって考えられるようにする。</p>		
小学校 第6学年	<p>単元「びっくり発見！このきまり」＜数量関係 領域＞</p> <p>身近な事象の中から数学の問題を設定することで、比例や反比例における変化や対応の考えを活用して、自分なりに見通しをもって考えられるようにする。</p>	A B C	相⑥ 相⑦
	<p>[本時] 題材「びっくり発見！ランドルト環のきまり」</p> <p>視力検査の体験から数量の関係を見いだす活動を設定することで、比例や反比例における変化や対応の考えを活用して、自分なりに見通しをもって考えられるようにする。</p>		
中学校 第1学年	<p>単元「関係式」＜式と計算 領域＞</p> <p>子どもの日常事象から数学の問題を設定し、解決可能性から現実の問題を捉えなおさせることで、事象の中にある数量を変数として考えられるようにする。</p>	A C D	相⑥ 相⑦
	<p>[本時] 題材「1次方程式の導入」</p> <p>自分たちでデザインしたロッカーの寸法を検討する活動を設定することで、事象の中にある数量を変数として考え、表現したりそのことから見通しをもって考えたりできるようにする。</p>		

表5 関数学習の具体的な指導法と「活用」モデルを軸とした授業のつくり方（Ⅲ期）

時 期	授 業 の つ くり 方	活用 サイクル	関数の考えの 数学的な内容
中学校 第2学年	<p>単元「1次関数」＜関数 領域＞</p> <p>区間ごとの変化の割合を1つの視点として様々な事象を検討する活動を設定することで、変化の割合から変化や対応の考えに着目して、論理的に考えたり、表現したりできるようにする。</p>	B	相⑦ 相⑧
	<p>[本時] 題材「変化の割合の利用」</p> <p>直角三角形の一辺と斜辺の関係を変化の割合の視点から考える活動を設定することで、変化や対応の考えに着目して、論理的に考え表現したり、その過程から考えを深めたりできるようにする。</p>		
中学校 第3学年	<p>単元「いろいろな関数」＜関数 領域＞</p> <p>社会問題や子どもの日常生活における疑問から数学の問題を設定し、解決可能性から現実の問題を捉えなおさせることで、変化や対応の考えを活用する意識を高める。</p>	A C D	相⑦ 相⑧

Ⅲ 成果と課題

- ・Ⅰ期では、関数を取り扱わない小学校2年生でも、乗法九九のきまりに着目させ、そのきまりを使って九九表を20段まで広げる活動を取り入れることで、二つの数量の関係を見いだす経験を積むことができ、またその関係から見いだしたきまりを用いて他の問題を解決することができることが分かった。また、小学校4年生では、身近な現象を捉える際に潜んでいる仮定に着目させ、問題をつくる活動を通して、仮定を意識しながら活用サイクルを批判的に捉える意識を向上させ、変化の様子に着目して考えを深める経験を積むことができた。
- ・Ⅱ期前半では、比例と反比例の式を学習する際に、式を提示することから導入する授業構成により、式から2つの数量の関係を見だし、変化の様子を表・式・グラフで表して考えるという意識を向上させることができ、変数の素地を養うことができた。さらに、各單元の中に関数の考えを用いて問題解決する場を設定するとともに、日常の事象に関数的な見方・考え方でとらえる單元を新たに設定した。そのことにより、数量関係について自分なりの見通しをもって筋道を立てて考えたり表現したりする経験を深めることができ、事象の中にある定数・変数などの要素に着目する意識を向上させることができた。
- ・Ⅱ期後半では、「数と式」領域において、現実の問題から数学の問題を設定する授業を行うことで、文字を批判的に捉える意識や比例の考えを日常で活かそうとする生徒の意識を向上させることができた。
- ・Ⅲ期では、傾きの緩急は「角の大きさ」という既知の概念を、割合という新しい概念へと丁寧につなぐ指導を通して、増え方は一定ではないという考えを変化の割合により考察することができた。しかし変化の割合の理解については、ある区間によって決められる値であり、大まかな変化の様子を調べるものであるという認識をもつことが難しい生徒もおり、課題が残った。

引用・参考文献

広島大学附属東雲小学校・中学校（2011；2012；2013）『東雲教育研究会実施要項』。

Sfard,A.（1991）On the dual nature of mathematical conceptions：Reflections on process and objects as different sides of the same coin, *ESM*, pp.1-36.

中島健三（1981）『算数・数学教育と数学的な考え方』, 金子書房, pp.173-242.

西村圭一（2012）『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』, 東洋館出版.

島田茂（1977）『算数・数学科のオープンエンドアプローチ―授業改善への新しい提案―』, みずうみ書房.

OECD（2004）『PISA2003年度調査 評価の枠組み』, ぎょうせい.

布川和彦（2013）「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討, 『上越教育大学研究紀要』第32巻, pp.169-180.

国立教育政策研究所（2014）『平成26年度全国学力・学習状況調査解説資料』, pp.5-8.

片桐重男（1988）『数学的な考え方の具体化』, 明治図書, pp.196-222.

三輪辰郎（1983）「数学教育におけるモデル化についての一考察」, 『筑波数学教育研究』第2号, 筑波大学数学教育研究室, pp.117-125.

Wild,C.J. & Pfannkuch,M.（1999）Statistical thinking in empirical enquiry, *International Statistical Review* 67(3), pp.223-265.

池田敏和（2004）「数学的モデリング・応用の指導で取り扱う問題の現実性を捉える枠組みと今後の課題」, 『第37回数学教育論文発表会論文集』, pp.607-612.

長崎栄三（2001）『児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力に関する発達の研究』, 国立教育政策研究所.

G,Kaiser. and B,Sriraman.（2006）A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education, *ZDM*, 38(3), pp.302-310.