算数･数学科

天 野 秀 樹･河 嵜 祐 子

Ⅰ　研究の経緯

1　はじめに

広島大学附属東雲小学校・中学校では，平成 22 年度より９年間の学びのつながりを意識した授業づくりのあり方に関する実践研究を行ってきている。算数・数学科ではこれまで，図形領域において van Hiele の学習水準論をもとにして，９年間の学びのつながりを意識した学習材を開発する視点を提案し，子どもの図形の捉え方の「押し上げ」と「引き上げ」に関する知見など，一定の成果をあげてきている（広島大学附属東雲小学校・中学校，2011；2012)。

本年度より算数・数学科では，関数に関して９年間の学びのつながりを意識した学習についての実践研究を進める。これまで我が国において多くの先行研究がある関数を本校で取り上げる理由は，第１に，全国学力・学習状況調査における平均正答率が，関数は 50%～55%であるのに対し，他の領域は 65%～70%であり（国立教育政策研究所，2012)，まだ研究の必要性が強く感じられることが挙げられる。第２に，小学校単独，もしくは中学校単独等での関数のつながりを意識した研究は数多くあるものの（たとえば，吉見，1970；礒田，1988)，小中９年間の学びのつながりを意識した関数指導の研究がまだ十分なされているとは言い難い現状があることが挙げられるからである。

2　研究の目的

本研究では，算数・数学科の関数の学びにおいて，小中９年間のつながりを意識した指導を展開することにより，子どもたちの学びの質を高めることを目的とする。子どもたちの学びの質が高まった姿として，目指す子どもの姿を表１のように設定した[1]。

表1　関数学習において目指すべき子どもの姿と主な単元

<table>
<tr><th>期</th><th>学　年</th><th>目 指 す べ き 子 ど も の 姿</th><th>主 な 単 元</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Ⅰ</td><td>小１</td><td rowspan="4">日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，「変化のようす」に着目して，見通しをもち筋道を立てて考え表現したり，そのことから考えを深めたりする。</td><td>かずしらべ</td></tr>
<tr><td>小２</td><td>ひょうとグラフ, たし算とひき算のかんけい</td></tr>
<tr><td>小３</td><td>□を使った式，表とグラフ</td></tr>
<tr><td>小４</td><td>ともなって変わる量, 折れ線グラフ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ⅱ</td><td>小５</td><td rowspan="3">日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，「変化のようす」や「対応のようす」に着目して，見通しをもって論理的に考察し表現したり，その過程をふり返って考えを深めたりする。</td><td>比例</td></tr>
<tr><td>小６</td><td>比例と反比例，文字と式</td></tr>
<tr><td>中１</td><td>比例と反比例</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ⅲ</td><td>中２</td><td rowspan="2">日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，「変化の様子」や「対応のようす」，「活用のしかた」に着目して，数学的な推論の方法を用いて論理的に考察し表現したり，その過程をふり返って考えを深めたりする。</td><td>１次関数</td></tr>
<tr><td>中３</td><td>２乗に比例する関数</td></tr>
</table>

3　研究の方法

本研究は，小中９年間の関数学習に関する事例研究である。目指すべき子どもの姿へと子どもの変容が見られたかど

うかの評価は，本年度は質的評価によって行う。質的評価は，授業での実際の子どもの発言，行動等を分析することによって行う。分析の枠組みとして，関数学習における 10 段階から成る段階的な目標を設定する。この目標は評価だけではなく，具体的な授業の手立てを考える際にも有効に働くと考えられる。それは各発達段階の学習内容の大きなまとまりごとの目標として設定されているからである。

4 質的評価の枠組み

関数学習において，関数的な見方・考え方の育成は重要である（大久保，2010)。関数的な見方・考え方，関数の考えを区別することがあるが，本研究では，関数関係を利用して問題解決を志向していく考え方を関数の考えとして扱う。

関数学習における関数の考えの要素は，集合の意識をもつこと，集合を構造化すること，変数の意識をもつこと，依存関係を求める意識をもつこと（菊池，1969），集合，順序，変数，対応（大久保，2010）等，さまざま挙げられる。これらの研究を基に，本研究では，集合，順序，変化，対応，活用の５種類をその要素として考える。特に，最後の活用の視点は，前の４種類の関数の考えの要素を用いて，問題を解決する際に「どう活用されるべきか」（中島，1981）に焦点を当てた要素である。換言すれば，活用の視点は，現実の世界の問題を算数・数学の世界の問題に変換し，算数・数学の世界で解決し，現実の世界の問題の解としてふさわしい解かどうかを見極め，そうであれば現実の世界の問題が解決されたとする，数学的モデル化（西村，2012）の視点でもある [2]。この５種類の関数の考えの要素を表１の目指すべき子どもの姿に対応させ，各発達段階での関数学習の目標を表２として設定した。

なお，表２における Stage とは，１段階上の Stage に移行したら，もう下の Stage には戻ってこないというような，線型的なモデルではなく，子どもの発達の側面を示した再帰的・超越的なモデルと考えられる。例えば，小学校１年時で対応の様子に着目したり，小学校４年時で２乗に比例する関数について考察したりすることは考えられるであろうし，逆に中学校３年時でも，中学校３年時なりの日常の事象の中から集合を見いだす，数学的モデル化の萌芽を見いだすことも考えられる。

表2 関数学習の目標段階

期	目　標　段　階
Ⅰ	Stage. 1　日常の事象の中から集合を見いだしたり，順序関係を見いだしたりする Stage. 2　日常の事象の中から集合や順序関係を見いだし，それらの関係について考え，表現したりその考えを深めたりする＜集合，順序のメタ的学習＞ Stage. 3　日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，変化の様子に着目して考え，表現したりその考えを深めたりする Stage. 4　日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，変化の様子に着目して，見通しをもち筋道を立てて考え，表現したりそのことから考えを深めたりする ＜変化の様子のメタ的学習＞
Ⅱ	Stage. 5　日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，対応の様子に着目して考え，表現したりその考えを深めたりする Stage. 6　日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，対応の様子に着目して，見通しをもち筋道を立てて考え，表現したりそのことから考えを深めたりする ＜対応の様子のメタ的学習＞ Stage. 7　日常の事象の中にある二つの数量の関係を見いだし，変化の様子や対応の様子に着目して考え，見通しをもって考えたり表現したりする ＜変化・対応の様子のメタ的学習＞ Stage. 8　日常の事象の中にある二つの数量の比例や反比例の関係を見いだし，変化の様子や対応の様子，活用の仕方に着目して，見通しをもって論理的に考察し表現したり，その過程をふり返って考えを深めたりする ＜比例や反比例を対象とした変化・対応の様子，活用の仕方のメタ的学習＞

Ⅲ	Stage. 9　日常の事象の中にある二つの数量の１次関数の関係を見いだし，変化の様子や対応の様子，活用の仕方に着目して，数学的な推論の方法を用いて論理的に考えたり，表現したり，その過程をふり返って考えを深めたりする ＜一次関数を対象とした変化・対応の様子，活用の仕方のメタ的学習＞ Stage. 10　日常の事象の中にある二つの数量の２乗に比例する関数の関係を見いだし，変化の様子や対応の様子，活用の仕方に着目して，数学的な推論の方法を用いて論理的に考えたり，表現したり，その過程をふり返って考えを深めたりする ＜２乗に比例する関数を対象とした変化・対応の様子，活用の仕方メタ的学習＞

この関数学習の目標段階は，基本的に，関数の考えの要素の学習の段階，関数の考えの要素のメタ的学習の段階が順を追って生じるように作成されている。このように，関数の概念は一度学習されると，子どもに内面的に位置付き，その概念は次第に子どもに機械的に利用されるようになり，最後にはあたかも数学的な実体を持っているのかのように子どもに捉えられていくと考えられる（Sfard，1991）[3]。なお，活用の仕方については，関数の考えを用いる目的や数学的モデル化そのものの技能に関わり，関数の考えの他の４要素と併せて学習されるため，この段階の流れを踏んでいない。

Ⅱ　本年度の研究計画

１　目指す子ども像に向けた授業仮説

目指す子ども像の表１，関数の考えの要素を基にした関数学習の目標段階の表２から，表３の授業仮説を設定した。

表3　授業仮説

期	授　業　仮　説
Ⅰ	子どもに身近な日常の事象の中から，集合を見いだしたり，順序関係を見いだしたり，変化の様子に着目したりさせる活動を設定し，年間を通して集合，順序，変化の３つの要素に着目させながら問題解決をする活動を設定すれば，すべての子どもがより高い Stage へと移行することができるのではないだろうか。
Ⅱ	子どもに身近な日常の事象の中から，比例や反比例の関係を見いだす活動を設定し，年間を通して変化の様子，対応の様子の要素に着目させながら問題解決をする活動を設定すれば，すべての小学５年生が Stage７へ，すべての小学６年生，中学１年生が Stage８の目標段階まで到達できるのではないだろうか。
Ⅲ	子どもに身近な日常の事象の中から，１次関数や２乗に比例する関数の関係を見いだす活動を設定し，年間を通して関数の考えの５つの要素に着目させながら問題解決をする活動を設定すれば，すべての中学２年生が Stage９，すべての中学３年生が Stage10 の目標段階まで到達できるのではないだろうか。

なお，小学６年生と中学１年生の目指す目標段階が一致しているが，数学的な質の違いが当然生じると考えられる。その違いは，数学的内容や，論理的考察や表現方法の質に及ぶことが考えられる。

２　本年度の研究計画

Ⅰ期，Ⅱ期，Ⅲ期のそれぞれにおいて仮説の検証を行うための事業実践を行う。その際，小中９年間における関数につながる内容や関数領域での授業づくりのあり方を質的評価の枠組みに基づいて考察する。そして，９年間の学びがつながるカリキュラム開発のための示唆を得ていく。

Ⅲ　成果と課題

・Ⅰ期では，積一定の反比例の式，積を変化させる比例の式の両者を順序よく並べる問題づくりの活動を通して，小学

校３年生でも□の変数性に気づくことができることを実証した。このことは，理解が難しいといわれている変数の概念の理解の素地となると考えられ，小中９年間の関数学習のつながりに有効な視点であると考えられる。また，２つの変わり方のきまりを見つける活動を通して，一方が変化すれば，それに伴って変化する量があるということに気づかせ，その関係を表や図や式に表すことで，３年生でも２つの数量を関連させて考えさせることができたり，比例・反比例に関わらず，対応の様子に着目する大切さにも気づかせたりすることができた。

・Ⅱ期前半では，変化の様子，対応の様子に着目して問題解決をする活動の場を年間を通して設定することで，数量の関係に成り立つきまりを見つけるための視点を身につけさせることができた。また，子どもたちは，表とともに図や式を用いて数量の関係に成り立つ関係を見いだすことができるようになった。これらのことは数量の関係に成り立つ関係を論理的に考察し表現したり，その過程をふり返って考えを深めたりするための素地となると考えられる。

・Ⅱ期後半では，χが１ずつ増えることに対して，ｙの増え方はだんだん少なくなっていく，というχの増加に対するｙの増減に着目した考えや，傾きが急か緩やかかという曲線の形に関する違いだけでなく，微小区間の変化の様子という高等学校の微分係数につながる考えなどに着目させることができた。

・Ⅲ期では，現実の事象から数学化し，関数の考えを用いて数学内で解決し，現実の事象に適応するという問題解決のサイクルを行うことで，１次関数や２乗に比例する関数の対応の様子に加えて，その有用性や活用の仕方も身につけさせることができた。

註

１　表１「関数学習において目指すべき子どもの姿と主な単元」は，「評価規準の作成のための参考資料」（国立教育政策研究所，2010）における「数学的な考え方」や，中島（1981）による関数の考えをもとにして作成した。中島は関数の考えを，集合を見いだすことと順序づけることを前提にして，変化を考えることや対応を考えることが重要な要素になると主張している。

２　数学的モデル化について西村（2012）は，数学的モデル化過程を「現実事象を数学の問題として定式化することにはじまり，作成した数学的モデルから数学的結論を導き出し，そしてその数学的結論をもとの事象に照らして解釈する」としている。

３　数学的な概念について，Sfard（1991）は，その操作的概念と構造的概念の 2 面性を相補的なものであるとし，内面化，凝縮化，具象化という一連の流れをサイクリックに繰り返す概念形成の一般モデルを提案している。本校では，関数の考えの要素の学習段階を操作的概念に，関数の考えの要素のメタ的学習を構造的概念に対応させて考えている。

引用・参考文献

広島大学附属東雲小学校・中学校『東雲教育研究会実施要項』，2011，2012.

礒田正美「関数の思考水準としての同定と特徴付けに関する一考察」，『数学教育学論究』，49・50，1988，pp.34-38.

菊池兵一『数学的な考え方を伸ばす指導』，北辰図書，1969，pp.205-248.

国立教育政策研究所「全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ中学校編」，2012.

中島健三『算数・数学教育と数学的な考え方』，金子書房，1981，pp.173-242.

大久保和義「§9　関数の考え・比例」，日本数学教育学会編，『数学教育学研究ハンドブック』，東洋館出版，2010，pp.142-149.

吉見力「関数的見方・考え方を育てる表指導の系統」，『日本数学教育学会誌』，52(2)，1970，pp.17-21.

西村圭一『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』，東洋館出版，2012.

Sfard,A.　”On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on process and objects as different sides of the same coin “, *ESM*, 1991, pp.1-36.