数学科学習指導案

指導者　　後　藤　春　香

日　時　　平成 24 年 12 月 1 日（土）　第１校時（10：00～10：50）

年　組　　中学校第２学年２組　計 39 名（男子 19 名，女子 20 名）

場　所　　中学校第２学年２組教室

単　元　　図形の性質と証明

単元について

本単元は，対頂角の性質，平行線と角の性質や条件，三角形の合同条件など利用し，これまで帰納的，類推的に扱ってきた図形の性質を演繹的に証明すること通して，図形を論理的に考察し表現する能力を養うことをねらいとしている。演繹的な証明，すなわち論証とは，仮定から正しいとされることだけを用いて結論を導くことである。単元を通して生徒は，問題の仮定から筋道を立てて思考して図形を読み取ったり，証明の筋道を相手に説明するといったような他者を意識した表現活動をしたり，証明が正しいか否か基準をもって判断したりすることを求められる。よって本単元は，数学科で育成することを狙いとする論理的な思考力・表現力・判断力を総合的に養うために重要な役割を担っている。

重要な役割を担う論証であるが，算数・数学科の図形の学習の流れの中では「壁」となることが知られている。また，他の領域と合わせて比較してみても生徒がつまずきやすい。そのつまずきの背景には，演繹的証明の特性（些細なことであっても順序立てて説明しなければならないという手続きの煩雑さ，単なる計算と違って結論だけを出せばいいのではなく，結論までの過程が評価のプロセスとなっており，一つでも間違いがあると正解にならないこと，仮定から導く十分条件が見えにくい，など）があると考えられる。また，多くの生徒にとって「論理的」「筋道を立てて」などといった証明に関係する言葉は，「難しそうだ」というマイナスイメージにつながっており，証明の学習に対する意欲が低下することも一因として考えられる。

本学級の生徒は，中学校第１学年時の図形の学習において，論証指導への円滑な移行を行うことを意識した指導を受けている。具体的には，論証の素地作りとして作図することを通して図形の性質と性質の間の関係を意識することを促す指導を受けている。生徒の図形学習の実態について明らかにするために行った事前テストの結果から，図形の相互関係の認識については，平行四辺形の仲間を形や性質から判断する問題において，「正方形・長方形は平行四辺形の仲間である」という認識がおよそ６割の生徒に定着していることが明らかとなった。昨年の図形の指導を行う前の定着率が３割であったことから，昨年と比較して図形の性質と性質の間の関係を意識することができる生徒が増えたことが明らかになった。また，事前アンケートの結果から生徒は内的成功への欲求（他者と比較してできる／できないではなく，自分自身ができるようになりたいという気持ち）が高く，図形の学習を通して自分の能力を高めたいと願っていることが明らかになった。

論証の入り口として，前単元で三角形の合同条件を用いて２つの図形が合同であることを証明する手順について学習している。図形の学習が論証に引き上げられた段階で学習に対して苦手意識を感じる生徒が増えたものの，筋道を立てて合同を証明するという一連の流れはおおよそ掴めているようである。しかし，その際与えられる仮定が分かりやすいことや，証明の先にある角度を求めたり，辺の長さを求めたりという付随する問題に意識が向くことで，証明そのものの必要性や良さに気付いている生徒は少ない。そのため，本単元で新しく出会う「すでに知っている性質を証明によって確かめる」活動には，どうして分かっていることを証明しなければならないのか納得できない，といった抵抗感があると考え

られる。また，命題を扱う際には補助線を引くことで見えてくることもあり，どのように証明に必要な根拠を引き出せばよいか戸惑うことも想定される。

本単元は論証との出会いの単元であることから，生徒に論理的に考察することの必要性を実感させることを大切にする。与えられた仮定が捉えにくい場合や結論を導く筋道が一見捉えにくい場合でも，命題が真であることを論理的に証明できることや，誰がその証明のプロセスを読んでも同じ解釈になるということを経験させ，証明には国や世代を超えて人を納得させるチカラがあることを味わわせたい。指導にあたっては，仮定から演繹的に結論を導くという一連の流れや仮定の見つけ方を毎回確認して課題に取り組ませ，証明の手順を内化させる。手順が明確になることで，生徒の証明への苦手意識や何をどうしていいのか分からないなどの証明のスタート地点で生じていたつまずきを解消することができると考える。また，証明によって性質を確かめた際にはその性質や図形の関係を視覚化する活動を取り入れる。性質や図形の関係を視覚的に整理することによって，証明を進める際の手がかりを視覚イメージとしてもつことができ，証明の最中に何を根拠として使ってよいのか分からなくなったというようなつまずきを改善することができると考える。

本時は，円の中に直径を２本とり，円とそれらの４つの交点を結ぶことでできる図形が長方形であることを証明するという課題を設定した。図形を視覚的にとらえた段階で生徒はその図形を長方形と判断すると予想される。しかし，長方形であることを証明するとなると，視覚的自明性があるゆえになぜ証明の必要があるのか，何を根拠として証明を進めていけばいいのかなど，「見た目で分かるのに証明できない」といったような戸惑いが生じることが想定される。よって，長方形の定義を復習することで，何を示すことで与えられた図形を長方形であると証明することができるのか全体で共有し，証明の方向づけを行う。また，前時までに獲得した二等辺三角形の性質の活用を促し，どのように根拠を立てればよいか見通しを持たせる。証明の途中で，直径によって作られた中心角に対する円周角は必ず 90°になる，といった円周角の定理の入り口に到達することとなり，第３学年での証明への橋渡しを行うことができると考える。

指導目標

１．観察や操作的な活動を通して図形の性質を見出し，平行線の性質，三角形の合同条件などを基に，その性質を演繹的に証明することができるようにする。

２．演繹的に証明する活動を通して，図形の性質を論理的に考察することができるようにする。また，逆について考察できるようにする。

３．平行四辺形の性質を逆向きに考えたり，平行四辺形を四角形の特別な場合と考えたりする活動を通して，長方形，ひし形，正方形の定義について理解し，四角形の包摂関係を理解することができるようにする。

４．作図や証明を通して，平行線と面積の関係を理解し，平行線を用いた等積変形を行うことができるようにする。

指導計画

１．二等辺三角形・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・５時間（本時はその４時間目）

２．直角三角形の合同・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２時間

３．平行四辺形の性質・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２時間

４．平行四辺形になる条件・・・・・・・・・・・・・・・・・・３時間

５．長方形，ひし形，正方形・・・・・・・・・・・・・・・・・２時間

６．平行線と面積・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２時間

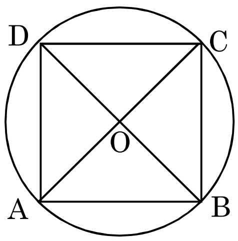
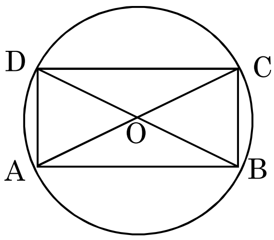
本時の目標

　円と２本の直径が作る４つの交点を結んでできる図形が長方形であることを，二等辺三角形の性質を用いて演繹的に証明することができる。

「学びのつながり」の視点

　Ⅲ期である中学校第２，第３学年では，van Hiele の学習水準理論の第３水準から第４水準へ移行させる。すなわち性質間の関係を命題化して学ぶ段階から，命題そのものを整理し体系づける段階へと移行させる。現状としては，第２学年は本単元で論証と初めて本格的に出会う段階にあるため，性質間の関係に関する命題の論証を中心に据えた指導を行っている。指導の中で，毎回授業の初めに証明の道筋を確認したり，仮定の見つけ方について共有したり，証明した性質を視覚化したりすることを行う。これらの指導により,生徒に論証を確実に行う力をつけさせる。この論証を確実に行う力をつけることで，命題そのものを学習の対象として対象化することができる，すなわち第４水準へ押し上げることができると考える。

学習の展開

学習活動と内容	指導上の留意点（◆評価）
１．導入 □　作図１：円に内接する正方形を作図する。  ＜予想される反応＞ ・　それぞれの中点で垂直に交わる直径をかけばいい。 ・　中心を対角線の交点にすればいい。 ・　弦の垂直二等分線を２本かけば中心が求まる。	○　正方形とはどのような図形であったか確認し，正方形の作図方法についての見通しを持たせるようにする。 ○　正方形の作図に必要な，円の中心を求める方法，垂線の作図方法などを全体で確認する。 ○　必要に応じて，順を追って円に内接する正方形の書き方を説明し，一人ひとりが作図できるよう支援を行う。
□　作図２：円に内接する長方形を作図する。  ＜予想される反応＞ ・　それぞれの中点で交わる直径をかけばいい。 ・　垂線を引く必要はない。 ・　正方形よりも簡単だ。	○　正方形と同様に作図させる。正方形と比較して作図が容易であることから，全員に作図できたことの充実感を味わわせるようにする。 ○　どうして作図が簡単になったのかという点について考えさせることで，正方形と長方形の違いを意識できるようにする。（対角線を直交させる必要がない。４つの角が直角になることに加え，正方形は四角形の一辺を等辺にする必要があった。長方形は縦と横の長さが違ってよい。など）

２．展開 □　本時の課題をつかむ。	
作図した図（作図２）が長方形であることを証明しよう。	
□　作図２の図が長方形であることを，二等辺三角形の性質を利用して，自力解決（証明）する。 ＜予想される反応＞ ・　仮定はなんとなくわかるが，結論に到達するためには，何を言ったらいいのだろうか。 ・　対角線が円の中心で交わっているから，半径が等しいことに着目すれば，二等辺三角形が２組４つできる。 ・　４つの角が直角になるためには，何を根拠にして証明していけばいいのだろうか。 ・　中心の角度に着目すると，外角＝内角＋内角に，二等辺三角形の性質が適用できるような気がする。	○　見た目で判断することができても，作図した図形が長方形であるかどうかは証明しないと断定できないことを確認する。 ○　結論は何か（四角形 ABCD は長方形である）を確認する。 ○　長方形の定義（４つの角が全て等しい）を全体で確認し，結論に向かって仮定や根拠を積み重ねる証明の設計図を想起させるようにする。 ○　証明の根拠をなす直角三角形に着目させ，２つの二等辺三角形が直角につながりそうだと意識できるようにする。 ○　長方形の性質と決定条件とを見極めさせることを通して，図形に対する理解が深まるよう指導する。
□　自分が考えた証明を発表する。 ＜予想される反応＞ ・　二等辺三角形は底角が等しいので，∠AOB の外角は∠OAB の２倍になること，∠AOD の外角は∠OAD の２倍になることを利用して，∠DAB が直角となることが言える。 ・　…四角形の３つの角が 90°を，二等辺三角形の性質を用いて証明することができれば，あとの１つの角は，四角形の内角の和を使って直角だと言える。	○　他の証明方法や，より簡潔な証明方法について吟味させるようにする。 ○　二等辺三角形の定義と性質を確認する。 ○　直径に対する円周角は常に 90°となることを証明していることを意識させ，今後の学習につながることを伝える。 ◆　二等辺三角形の性質や，三角形の内角の和を根拠にして，作図した図形が長方形になることを演繹的に証明することができたか。【数学的な技能】
□　作図１の図が正方形になることを証明する。 ＜予想される反応＞ ・　４つの二等辺三角形は合同な三角形であることを使って証明すればよい。 ・　長方形と似ている。正方形は長方形ともいえるのではないだろうか。	○　正方形の定義（４つの角が全て等しい，４つの辺が全て等しい）を全体で確認し，結論に向かって仮定や根拠を積み重ねる証明の設計図を想起させるようにする。 ○　正方形の証明は，長方形の証明に１つ要素（等辺関係）を足せばよいことを，図形の包接関係を用いて指導する。
３．まとめ □　本時の気づきを自分の言葉でまとめる。	○　本時の学習内容を確認する。また，本時の学習内容の中には，「ターレスの定理」が出てきて，広く用いられていることを知らせる。