広島大学大学院工学研究科博士課程前期入学試験模擬問題

Graduate School of Engineering (Master's Programs), Hiroshima University

Entrance Examination Sample Questions

試験科目 Subject	システムサイバネティクス (専門科目 I) System Cybernetics I

専　攻 Department	システムサイバネティクス System Cybernetics

A－1

実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 ${}^tPAP$ が対角行列になるような直交行列 P をひとつ求め，さらに ${}^tPA^2P$ を計算せよ．ここで ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(3) x, y, z を実数とする．$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たす列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ に対して，$Q(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A^2\mathbf{x}$ とおく．ここで ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置による行ベクトルとする．このとき，$Q(\mathbf{x})$ の値が取りうる範囲を決定し，その値を最大にする列ベクトル $\mathbf{x}_0$ をひとつ求めよ.

(4) (3) で得られた列ベクトル $\mathbf{x}_0$ に対して, 内積 $(A^4\mathbf{x}_0) \cdot (A^{-1}\mathbf{x}_0)$ を求めよ.

Consider the real symmetric matrix A given above.

(1) Find all the eigenvalues of A.

(2) Find an orthogonal matrix P so that ${}^tPAP$ becomes diagonal, and compute ${}^tPA^2P$. Here ${}^tP$ denotes the transposition of P.

(3) Let x, y, z be real numbers, and set $Q(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A^2\mathbf{x}$ for column vectors $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ satisfying $x^2+y^2+z^2 = 1$, where ${}^t\mathbf{x}$ denotes the transposition of $\mathbf{x}$. Determine the range of possible values of $Q(\mathbf{x})$, and find a column vector $\mathbf{x}_0$ which attains the maximum value for $Q(\mathbf{x})$.

(4) For a column vetor $\mathbf{x}_0$ obtained in (3), find the inner product $(A^4\mathbf{x}_0) \cdot (A^{-1}\mathbf{x}_0)$.

$\boxed{\text{A}-2}$

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\left(\int_{2\pi}^{2R}\frac{\sin x}{x}dx-\int_{\pi}^{R}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx\right)$ を求めよ.

(2) $R\geq\pi$ のとき, 等式 $\displaystyle\int_{\pi}^{R}\frac{\sin^2 x}{x}dx=-\frac{\sin 2R}{4R}+\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2R}\frac{x-\sin x}{x^2}dx$ が成り立つことを示せ.

(3) $x\geq 2\pi$ のとき, 不等式

$$(\star)\qquad x-\sin x\geq\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)x$$

が成り立つ. $(\star)$ を利用して, $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{\pi}^{R}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\infty$ が成り立つことを示せ.

(1) Find the limit $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\left(\int_{2\pi}^{2R}\frac{\sin x}{x}dx-\int_{\pi}^{R}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx\right)$.

(2) Show that if $R\geq\pi$, then the equality $\displaystyle\int_{\pi}^{R}\frac{\sin^2 x}{x}dx=-\frac{\sin 2R}{4R}+\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2R}\frac{x-\sin x}{x^2}dx$ holds.

(3) For all $x\geq 2\pi$, the inequality

$$(\star)\qquad x-\sin x\geq\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)x$$

holds. By making use of $(\star)$, show that $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{\pi}^{R}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\infty$ holds.

A－3

(I) 確率変数 X, Y は独立で, X の分散は 1, $X+Y$ の分散は $2X$ の分散に等しいとする.

Y の分散を求めよ.

(II) 事象 A, B, C は独立で, $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$, $P(C)=\dfrac{1}{4}$ とする.

(1) $P(A\cup B)$ を求めよ.

(2) $P(A\cup B\cup C)$ を求めよ.

(I) Suppose that random variables X and Y are independent, that the variance of X equals 1 and that the variance of $X+Y$ equals that of $2X$. Find the variance of Y.

(II) Suppose that events A, B and C are independent and that $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$ and $P(C)=\dfrac{1}{4}$.

(1) Find $P(A\cup B)$.

(2) Find $P(A\cup B\cup C)$.

広島大学大学院工学研究科博士課程前期入学試験模擬問題

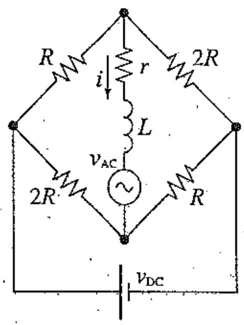
Graduate School of Engineering (Master's Programs), Hiroshima University

Entrance Examination Sample Questions

試験科目 Subject	システムサイバネティクス（専門科目 II） System Cybernetics II

専　攻 Department	システムサイバネティクス System Cybernetics

B－1



図の回路において，交流電圧 v_{AC} と直流電圧 v_{DC}，および素子の値をそれぞれ以下のように仮定する。

交流電圧：$v_{AC}=7\sin(\omega t)$ [V]，直流電圧：$v_{DC}=7$ [V]（定数），$\omega L=\frac{7}{3}$ [Ω]，$R=r=1$ [Ω]

（ω：角周波数[rad/s]，t：時間[s]，L：インダクタンス[H]，R, r：抵抗[Ω]）

このとき，抵抗 r を流れる電流 i は，次式の形で表すことができる。

$$i=\boxed{I_A}\sin(\omega t+\boxed{\theta})+\boxed{I_B}$$

$\boxed{I_A}$，$\boxed{I_B}$，$\boxed{\theta}$ を求めよ。

In the circuit shown in the figure, assume that AC (alternating current) voltage v_{AC}, DC (direct current) voltage v_{DC} and other elements' values are given as follows:

AC voltage: $v_{AC}=7\sin(\omega t)$ [V], DC voltage: $v_{DC}=7$ [V] (constant), $\omega L=\frac{7}{3}$ [Ω], $R=r=1$ [Ω]

(ω : angular frequency [rad/s], t : time [sec], L : inductance [H], R, r : resistance [Ω])

Then, the current i, flowing through the resistance r, can be expressed by the following equation:

$$i=\boxed{I_A}\sin(\omega t+\boxed{\theta})+\boxed{I_B}$$

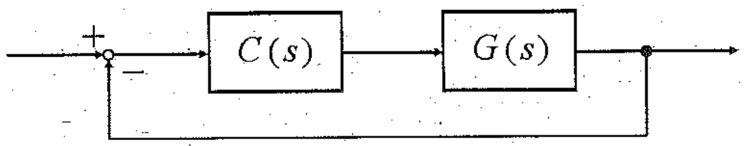
Obtain $\boxed{I_A}$, $\boxed{I_B}$ and $\boxed{\theta}$.

B − 2

次式で与えられる伝達関数$G_1(s)$，$G_2(s)$，$G_3(s)$および$C(s)$について，以下の問に答えなさい。

$$G_1(s)=\frac{0.05}{s+0.1} \qquad G_2(s)=\frac{s}{s+0.2} \qquad G_3(s)=\frac{1-s}{1+s} \qquad C(s)=\frac{k_P(1+10s)}{10s}$$

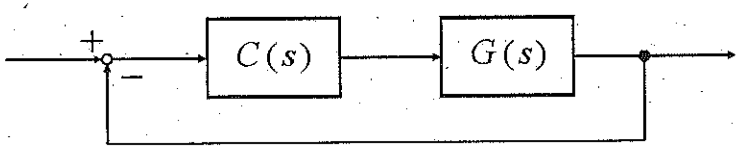
(1) $G_1(s)$のステップ応答を導出し，その概形を書きなさい。
(2) $G_2(s)$の周波数特性として，ゲイン$|G_2(j\omega)|$および位相角$\angle G_2(j\omega)$を導出しなさい。
(3) $G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$とするとき，この$G(s)$を制御対象とし，$C(s)$を制御器として下図のようなフィードバック制御系を構成する。このとき，制御系が安定となるk_Pの範囲を答えなさい。



Answer the following questions where the transfer functions $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ and $C(s)$ are given by the following equations;

$$G_1(s)=\frac{0.05}{s+0.1} \qquad G_2(s)=\frac{s}{s+0.2} \qquad G_3(s)=\frac{1-s}{1+s} \qquad C(s)=\frac{k_P(1+10s)}{10s}$$

(1) Derive the step response of $G_1(s)$ and sketch it.
(2) Derive the gain $|G_2(j\omega)|$ and the phase angle $\angle G_2(j\omega)$ of the frequency response characteristic of $G_2(s)$.
(3) Consider the feedback control system as shown below where $G(s)$ is the controlled object, which is given by $G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$, and $C(s)$ is the controller. Derive the range of k_P in which the feedback control system can be stabilized.



B－3

図の回路に対して，次の問いに答えよ．ただし，回路中の演算増幅器は理想特性を持つものとする．

1. V_1, V_2, V_3 をそれぞれ入力電圧 V_{in} の関数として求めよ．

2. 電圧利得 V_{out}/V_{in} を求めよ．

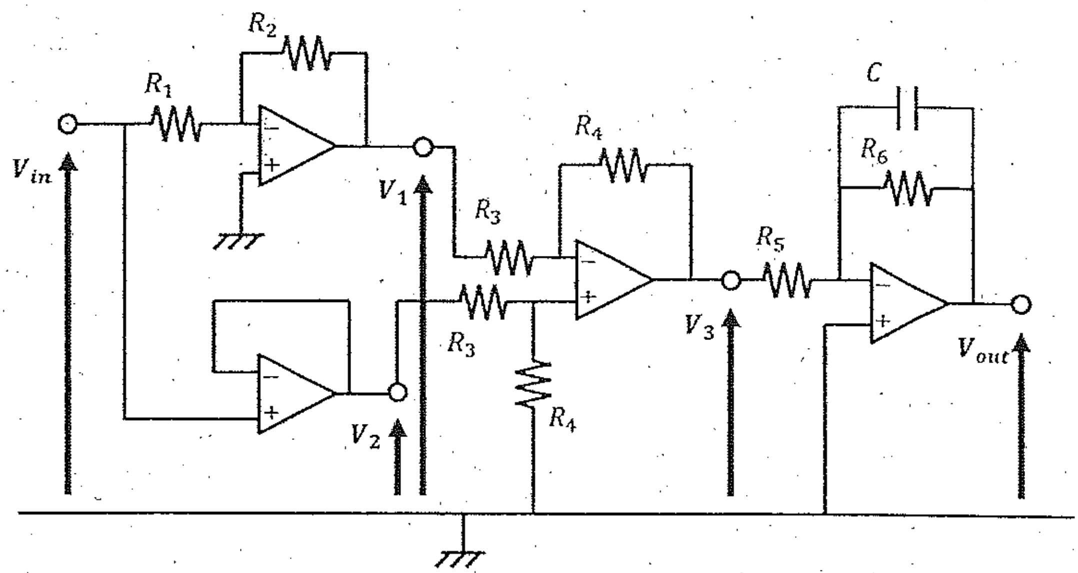
3. カットオフ周波数 f_c を求めよ．

Answer questions 1, 2, and 3 for the circuit in the figure. Here, the operational amplifiers in the circuit have ideal characteristics.

1. Find the voltages $V_1, V_2,$ and V_3 as functions of the input voltage V_{in}.

2. Find the voltage gain V_{out}/V_{in}.

3. Find the cut-off frequency f_c.



B－4

2つの1ビットの入力A，Bと3つの出力X_0，X_1，X_2を持つ1ビット比較器について考える．$A > B$，$A = B$，$A < B$のとき，出力はそれぞれ$X_2\ X_1\ X_0 = 0\,0\,1$，$0\,1\,0$，$1\,0\,0$となる．

(1) A，B，X_0，X_1，X_2の真理値表を示せ．

(2) X_0，X_1，X_2のそれぞれの論理関数をA，Bにて記述せよ．

(3) X_1の論理関数をX_0，X_2にて記述せよ．

(4) 3個の2入力ANDゲートと4個のNOTゲートを用いて1ビット比較器の論理回路を記述せよ．

2つの2ビットの入力C_1C_0, D_1D_0と3つの出力Y_0, Y_1, Y_2を持つ2ビット比較器について考える．$C > D$，$C = D$，$C < D$のとき，出力はそれぞれ$Y_2\ Y_1\ Y_0 = 0\,0\,1$，$0\,1\,0$，$1\,0\,0$となる．ただし，$C = 2C_1 + C_0$，$D = 2D_1 + D_0$である．

(5) 2個の1ビット比較器と，3個の2入力ANDゲートと，2個の2入力ORゲートを用いて2ビット比較器の論理回路を記述せよ．ただし，1ビット比較器は下記のように記述できる．

Consider a 1-bit comparator; It has two 1-bit inputs A and B and three outputs X_0, X_1 and X_2. If $A > B$, $A = B$ or $A < B$, the output is $X_2\ X_1\ X_0 = 0\,0\,1$, $0\,1\,0$ or $1\,0\,0$, respectively.

(1) Describe the truth table for A, B, X_0, X_1 and X_2.

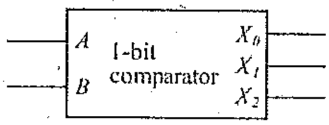
(2) Describe logic functions for X_0, X_1 and X_2, respectively, using A and B.

(3) Describe a logic function for X_1 using X_0 and X_2.

(4) Write a logic circuit of the 1-bit comparator using three 2-input AND gates and four NOT gates.

Consider a 2-bit comparator; It has two 2-bit inputs C_1C_0 and D_1D_0 and three outputs Y_0, Y_1 and Y_2. If $C > D$, $C = D$ or $C < D$, the output is $Y_2\ Y_1\ Y_0 = 0\,0\,1$, $0\,1\,0$ or $1\,0\,0$, respectively. Here $C = 2C_1 + C_0$ and $D = 2D_1 + D_0$.

(5) Write a logic circuit of the 2-bit comparator using two 1-bit comparators, three 2-input AND gates and two 2-input OR gates. Here the 1-bit comparator can be described as the figure below.



B－5

次の数理計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x_1, x_2) \\ \text{subject to} & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(1) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ とする．この数理計画問題を図的に解け．

(2) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ とする．この数理計画問題をシンプレックス法を用いて解け．

(3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 5x_2$ とする．この数理計画問題を図的に解け．

(4) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 5x_2$ とする．(3) で求めたそれぞれの最適解に対して，Kuhn-Tucker 条件が成立するかどうか詳しく調べよ．

Given the following mathematical programming problem:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x_1, x_2) \\ \text{subject to} & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

(1) Let $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Solve the mathematical programming problem graphically.

(2) Let $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Solve the mathematical programming problem using the simplex method.

(3) Let $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 5x_2$. Solve the mathematical programming problem graphically.

(4) Let $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 5x_2$. Verify in detail whether the Kuhn-Tucker conditions are satisfied or not at each of the optimal solutions obtained in (3).

$\boxed{\text{B}-6}$

範囲 $x>0$ で定義された $y(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad y' = y^2 - \frac{(3+x)y-2}{x}$$

を考える.

(1) 関数 $y_0(x) = \dfrac{2}{x}$ が微分方程式 $(*)$ の解となることを示せ.

(2) $z(x) = y(x) - y_0(x)$ とおくことにより, 微分方程式 $(*)$ を $z(x)$ に関する微分方程式に書きかえよ.

(3) (2) の結果を用いて, 微分方程式 $(*)$ を条件 $y(1) = 3$ の下で解け.

Consider the differential equation for $y(x)$

$$(*) \qquad y' = y^2 - \frac{(3+x)y-2}{x}$$

defined for $x>0$.

(1) Show that $y_0(x) = \dfrac{2}{x}$ solves the differential equation $(*)$.

(2) Set $z(x) = y(x) - y_0(x)$. Then rewrite the differential equation $(*)$ as the differential equation for $z(x)$.

(3) Solve the differential equation $(*)$ under the condition $y(1) = 3$ by making use of the result in (2).