平成30年度広島大学理学部

物理科学科

第3年次編入学試験学力検査問題

筆記試験(物理, 数学, 英語) (5問)

平成29年7月7日 自　9時　00分
至　12時　00分

答案作成上の注意

1. この問題冊子には, 物理, 数学, そして英語の問題が計5問, 総ページは表紙を入れて7ページある.
2. 解答用紙は5枚ある. 解答はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙に記入すること. 紙面が不足する場合は, 明示の上, 裏面も解答に用いてよい.
3. 下書用紙は, 各受験者に3枚ある.
4. 受験番号は, すべての解答用紙 (1箇所), 下書用紙 (1箇所) の所定の欄に必ず記入すること.
5. 配付した解答用紙, 下書用紙は, 持ち出さないこと.

問１　英語

以下の英文を読み，下線部(ア), (イ), (ウ), (エ)を和訳せよ．

著作権保護の観点から，公開していません。

著作権保護の観点から，公開していません。

“Engines of Discovery : A Century of Particle Accelerators”,
Andrew Sessler and Edmund Wilson 著， World Scientific 出版より抜粋

accelerator : 加速器， abstruse : 難解な， simplification : 単純化，
interplay : 相互作用，Ernest Rutherford : アーネスト・ラザフォード（物理学者），
hutch ： 小さな家，radioactive decay : 放射性崩壊， fluorescent : 蛍光性の，
the Royal Society in London : ロンドン王立協会

問２　数学

(1)　行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(2)　積分 $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を考える．重積分 I^2 を，二次元極座標を用いて計算することにより，I を求めよ．

(3)　s を正の実数とするとき，ガンマ関数 $\Gamma(s)=\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ について，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ を示せ．

(4)　xy 平面上において，θ を変数として，座標 x，y が，$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ で与えられる曲線を，サイクロイドと呼ぶ．ここで，a は定数である．$\theta\geq 0$ におけるこの曲線上で，x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(x=0,\ y=0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$，2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$，…，n 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする．x_n，y_n を求めよ．

(5)　3 次元空間における点 P，Q，R を考える．原点を O とするとき，$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\boldsymbol{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が，$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ を満たしているとする．ここで，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．このとき，P，Q，R は同一直線上にあることを示せ．

問３　力学

n 個の質点から成る力学系を考える．各質点の質量および位置ベクトルをそれぞれ m_i および $\boldsymbol{r}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$，この系が含む質点の全質量を $M\left(=\sum_{i=1}^{n} m_i\right)$ で表すことにする．i 番目の質点には外力 $\boldsymbol{F}_i$ に加え，j 番目の質点からの内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ が作用している．ただし，質点が自分自身に内力を及ぼすことはないので，$\boldsymbol{F}_{ij}$ は $i=j$ のときゼロである．i 番目の質点に対するニュートンの運動方程式は

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}$$

のように書くことができる．ここで，t は時間を表す．以下の問に答えよ．

(1) この力学系の重心 $\boldsymbol{R}$ を求めよ．

(2) 任意の i と j に対して，$\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = \boldsymbol{0}$ なる関係が成立する（$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトル）．その理由を述べよ．

(3) 重心の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ が満たす運動方程式を導け．

(4) i 番目の質点の，重心 $\boldsymbol{R}$ に対する相対位置を $\boldsymbol{s}_i$ と書く（すなわち，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{s}_i$ とする）．このとき，$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{0}$ であることを証明せよ．

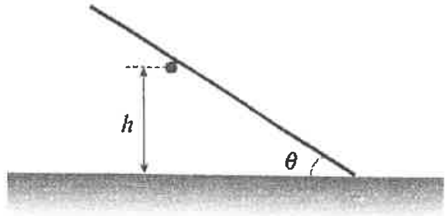
(5) この系の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は次のように定義される：

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

ここで，$\boldsymbol{p}_i$ は i 番目の質点がもつ運動量 $\boldsymbol{p}_i = m_i \dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$ である．$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{s}_i$ を用いて，$\boldsymbol{L}$ が“重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_G = M\boldsymbol{R} \times \dfrac{d\boldsymbol{R}}{dt}$”と“重心の周りの角運動量 $\boldsymbol{L}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{s}_i \times \dfrac{d\boldsymbol{s}_i}{dt}$”に分離できることを示せ．

(6) 全角運動量 $\boldsymbol{L}$ の時間変化率 $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ が外力のモーメント $\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$ に等しいことを証明せよ．ただし，i 番目の質点と j 番目の質点間に働く内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ は，相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ と常に平行であるとする．

(7) 右図のように，粗い水平面から高さ h の位置に，滑らかな細い棒が水平に固定されている．これと直交するように長さ ℓ の一様な直線棒を立てかけた．水平面となす角度が θ になったとき，直線棒はちょうど滑り落ちることなく釣り合った．このとき，棒と水平面との間の摩擦係数 μ を求めよ．



問 4　電磁気学

図 1 のように無限に広がる導体 (電位はゼロ) から距離 a $(a > 0)$ の地点に点電荷 A がある．導体面は $z = 0$ の xy 面上にあり，点電荷 A の位置は $(x, y, z) = (0, 0, a)$ である．点電荷 A の電荷量を q として以下の問に答えよ．真空の誘電率は ε_0 とする．

(1) 導体上には電荷が誘起され，点電荷 A はクーロン力を受ける．その向きと大きさを求めよ．

(2) z 軸上における電場を $z > 0$ の範囲 ($z = a$ を除く) で求めよ．

(3) 導体上に誘起されている電荷密度を，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の関数として求めよ．

(4) (3) の結果を用いて，導体上に誘起されている総電荷量を求めよ．

次に同様の導体板をもう一枚 $z = 2a$ の場所に図 2 のように追加した．2 つの導体は平行で距離は $2a$ である．2 つの導体板の電位はともにゼロとして以下の問に答えよ．

(5) 電荷 A に働くクーロン力を求めよ．

(6) ふたつの導体上に誘起される電荷が，電荷 A の場所 ($z = a$) につくる電位を求めよ．必要であれば次式を用いよ．

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots = \log 2$$

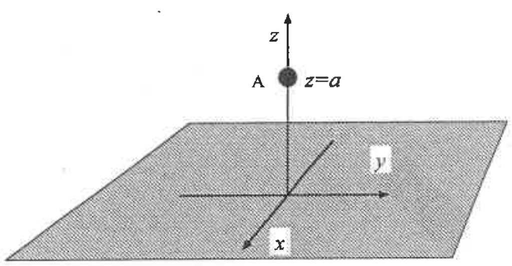


図 1: xy 面上に無限に広がる導体から距離 a の地点に電荷 A が置かれている．

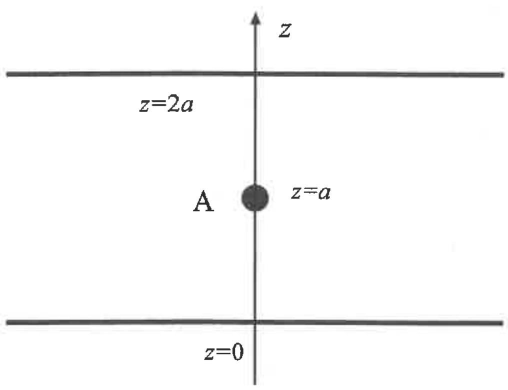


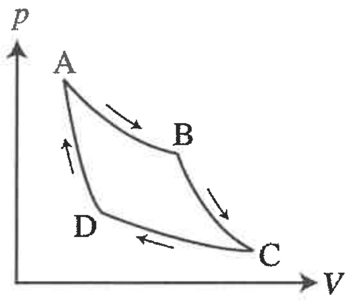
図 2: 2 つの無限に広がる導体面の間に電荷 A がある．

問5　熱力学

(1) 体積 V_1, V_2 の2つの容器に，全体で n モルの理想気体を入れ，2つの容器を細い管でつなぐ．それぞれの容器内の気体の温度が T_1，T_2 で平衡状態にあるとき，圧力を求めよ．気体定数を R とせよ．

(2) 体積 V_1 の状態にある n モルの理想気体を考える．温度一定のまま，体積 V_1 の状態から体積 V_2 の状態まで膨張したときのエントロピー変化を求めよ．気体定数を R とせよ．また，この過程が可逆過程か，不可逆過程かを，理由とともに記せ．

(3) 理想気体のカルノー・サイクルについて考える．p，V，T，S を，それぞれ，圧力，体積，温度，エントロピーとする．下図は，カルノー・サイクルの p-V 図である．A→B：等温膨張，B→C：断熱膨張，C→D：等温圧縮，D→A：断熱圧縮の過程を表している．この p-V 図に対応する T-S 図を書け．具体的な T，S の値は，図に書かなくてよい．



(4) p を圧力，V を体積，T を温度，a，b を正の定数としたとき，状態方程式が $p(V-b)=aT$ で与えられる気体について考える．以下の問に答えよ．

① 体膨張率 $\beta=\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ と等温圧縮率 $\kappa=-\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ を，p，T，a，b で表せ．

② 気体が，温度一定のまま，体積 V_1 の状態から体積 V_2 の状態まで膨張した．このとき，外に対して気体がした仕事を求めよ．ただし，$V_1>b$ とする．