ミシガン大学（アメリカ）　研修報告書
WENO scheme を用いた流体構造計算手法の高精度化に関する研究

工学研究科　機械システム工学専攻　松原　聡汰

１．はじめに

2015 年 8 月 29 日から同年 9 月 28 日の間、アメリカのミシガン大学において研究を行った。以下にその報告内容を示す。

２．共同研究テーマ

ミシガン大学の Computational Flow Physics Laboratory では乱流や衝撃波、多相流などの CFD が盛んに行われている。CFD で用いられる多くの計算手法の中の一つに WENO scheme というものがある。これは圧縮性流体の CFD で用いられることが多い手法であり、ミシガン大学の研究室でも用いられている。一方で私が行っている非圧縮性流体の CFD にも応用できる可能性がある。そこで今回はこの WENO scheme の基礎学習および非圧縮性流体 CFD への応用に関する共同研究を行った。

３．共同研究スケジュール

8 月 29 日　　出国
8 月 31 日～9 月 26 日　研究，プレゼンテーション
9 月 28 日　　帰国

４．共同研究派遣先の概要

大学名: University of Michigan College of Engineering
所在地: アメリカ　ミシガン州　アナーバー
指導教員: Assis. Prof. Eric Johnsen

５．共同研究内容

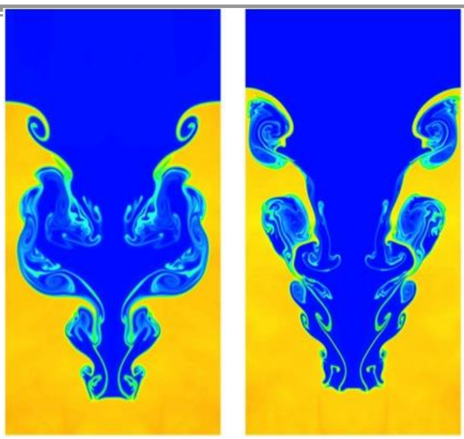
５．１　背景・目的

現在、ものづくりにおける研究・開発工程ではコンピュータを用いたシミュレーションの実用性が認められ、ほぼ必須の技術となりつつある。従来は実験やテストを繰り返していたことを容易に低コストで行える、実験による再現が困難なこと、可視化が不可能なことの結果を求めることができる、これらがシミュレーションの利点である。

しかしその一方でシミュレーションによる事象の完全な再現には極めて詳細なモデルが必要であり、これはメッシュ分割の規模や境界条件の設定など様々な面で問題があり、現段階では不可能である。この理由から現在は、いかにシミュレーションの精度を上げて実現象に近づけることができるかということに焦点を当てたシミュレーション方法の改善が行われている。

シミュレーション精度の改善方法の一つにシミュレーションの中で使用される計算方法の高精度化がある。私は現在広島大学で、泳動する魚体の周囲の流体構造や魚体に加わる流体力の解明に関する研究を CFD(Computational Fluid Dynamics)を用いて進めている。そのなかで使用する計算方法の一つに CIP 法があるが、私は今回この CIP 法をより高精度の計算方法に変更することでシミュレーション全体の精度が向上するのではないかと考えた。代替の計算方法の候補の一つに WENO scheme がある。これは圧縮性流体のシミュレーションで用いられることがある計算方法で、CIP 法の精度が 3 次精度であるのに対し、WENO scheme は 3 次精度、5 次精度の二つがある。また私の研究のような非圧縮性流体のシミュレーションにも応用できる可能性があり、これができればシミュレーション精度の向上にもつながると考えられる。

今回は WENO scheme の基本的な使用方法について学ぶとともに、非圧縮性流体のシミュレーションへの応用を目的として共同研究を行った。



http://www-personal.umich.edu/~ejohnsen/research.html

図 1.　ミシガン大学でのシミュレーション例

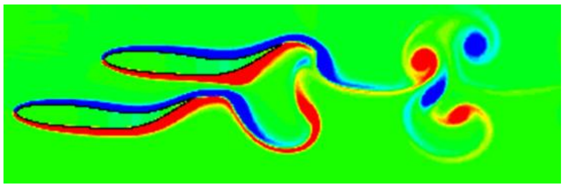


図 2.　広島大学でのシミュレーション例

５．２　計算手法

広島大学で行っている非圧縮性流体の CFD における計算手法を示す。

計算では支配方程式として、以下に示す N-S(Navier-Stokes)方程式と連続の式を用いている。ここで、これらの式は代表速度(u_0)、代表長さ(L)、密度(ρ_0)によって無次元化されている。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla p} + \frac{1}{Re}\nabla^2 \boldsymbol{u} + G \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad (2)$$

計算時には(1)式を移流項と非移流項に分離して計算を行う分離解法を用いる。移流項は CIP 法、非移流項のうち圧力の Poisson 方程式は SOR(Successive Over-Relaxation)法、粘性項は差分法、物体と流体を認識するための外力項 G は境界埋め込み法の一種である VB(Virtual Boundary)法[6]を用いて解いている。

５．３　CIP 法と WENO scheme

次に現在使用している CIP 法と今回の共同研究のテーマでもある WENO scheme について説明する。

(ｉ)CIP 法

CIP 法は二つの隣り合う格子点上の物性値と微分値を与え、その四つの値から三次元多項式で各格子点間を補間する方法である。物性値に加え微分値も考慮するため、二つの格子点間の補間としては一次差分法と比べて精度が高い。下図 3 は CIP 法の概要を示したものである。CIP 法は各格子点間について三次多項式を用いて補間する。速度 u が正のとき 2 つのメッシュ i と $i-1$ の間のプロファイルを

$$F_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (3)$$

と表せる。ここで未知数 a_i, b_i, c_i, d_i は隣り合う 2 つの格子点上で与えられている物性値 f_i, f_{i-1} 及び物性値の空間微分値 f_i', f_{i-1}' を用いて決定する。

$$a_i = \frac{g_i + g_{iup}}{D^2} + \frac{2(f_i - f_{iup})}{D^3}$$

$$b_i = \frac{3(f_{iup} - f_i)}{D^2} - \frac{2g_i + g_{iup}}{D}$$

$$c_i = g_i \qquad d_i = f_i$$

ここで添え字iupとDは、$iup=i-1$と$D=-\Delta x$を表す。また、速度が負のときは 2 点i、$i+1$の間でプロファイルを作り、添え字iupとDは、それぞれ$iup=i+1$と$D=\Delta x$を表す。こうして、次の時刻での値$n+1$は、このプロファイルを$u\Delta t$だけ移動したもの、すなわち、

$$f_i^{n+1}=F_i(x_i-u\Delta t)=a_i\xi^3+b_i\xi^2+g_i\xi+f_i$$

となる。ここで$\xi=-u\Delta t$と定義している。

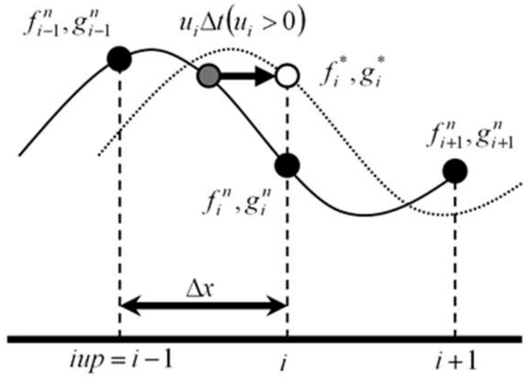


図 3.　CIP 法の概要図

（ⅱ）WENO scheme

WENO scheme も CIP 法と同様に二つの隣り合う格子点間を補間する方法であるが、プロファイルの表し方が CIP 法と異なる。WENO scheme は ENO scheme に重みづけをすることで高次の精度を達成した方法であり、WENO scheme は風上差分を改良した方法である。図 4 に概要図を示す。WENO scheme において次の時刻での値$n+1$は次式で示される。

$$f_i^{n+1}=f_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\widehat{F_{i+1/2}^n}-\widehat{F_{i-1/2}^n})$$

ここで、$\widehat{F_{i+1/2}^n}$は、条件によりとる値が異なる。一例を示すと、

$$\widehat{F_{i+1/2}^n}=\frac{w_0}{w_0+w_1+w_2}V_0+\frac{w_1}{w_0+w_1+w_2}V_1+\frac{w_2}{w_0+w_1+w_2}V_2$$

である。図 4 中のufは Flux と呼ばれ、重み w や V はこの Flux の組み合わせによって求めることができる。

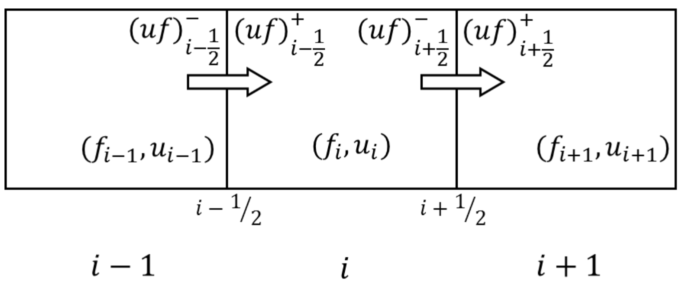


図 4.　WENO scheme の概要図

５．４　一次元移流方程式

まず、WENO scheme のプロファイルの表し方を学び、一次元の移流方程式を解くシミュレーションコードを作成した。一次元移流方程式は次の式である。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uf)=0$$

通常、CIP 法は非保存形式の移流方程式を解く際に用いるが、WENO scheme は保存形式の式に適用する方法である。今回は非圧縮性流体の際は非保存形式､保存形式の移流方程式が等しくなることから、上記の保存形式の式に WENO scheme を適用した。

初期条件が以下のような矩形波の移流をシミュレーションした。

表 1.　初期条件 1

初期物性値 f	$1.0(0.1 \le x \le 0.2)$
移流速度 u	1.0
格子間隔Δx	4.0×10^{-3}
時間間隔Δt	4.0×10^{-4}

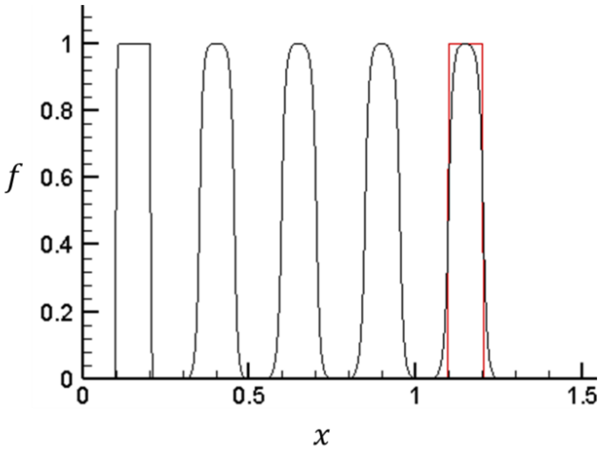


図 5.　矩形波の移流

図 5 の結果より初期条件で設定した矩形波が振動や拡散のあまりない状態で x 軸右方向へ移流していることが分かる。WENO(Weighted Essential Non-Oscillatory)scheme はその名前からも分かる通り、振動を抑えられることが特徴である。結果からもほとんど振動がない状態で移流することが確認できた。一方で CIP 法と比べると値が拡散してしまうことも分かった。また、CIP 法は隣り合う 2 点のみの情報から 2 点間のプロファイルを作るのに対し、WENO scheme は前後 5 点の情報を用いてプロファイルを作る。そのため、精度は向上するが、急激な値の変化を正確にシミュレーションするのが難しい。

５．５　二次元移流方程式

次に二次元に拡張させたシミュレーションコードの作成を行った。解いた式は以下である。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uf)+\frac{\partial}{\partial y}(vf)=0$$

初期条件は次のように与えた。

表 2.　初期条件 2

初期物性値 f	$f(x,y)=-\tanh(y/2)$
移流速度 u,v	$u=-V_T\frac{y}{r}$　$v=V_T\frac{x}{r}$　$V_T=sech^2(r)\tanh(r)/V_{T0}$
格子間隔Δx	6.7×10^{-2}
時間間隔Δt	3.3×10^{-3}
計算手法	WENO,CIP-SCL

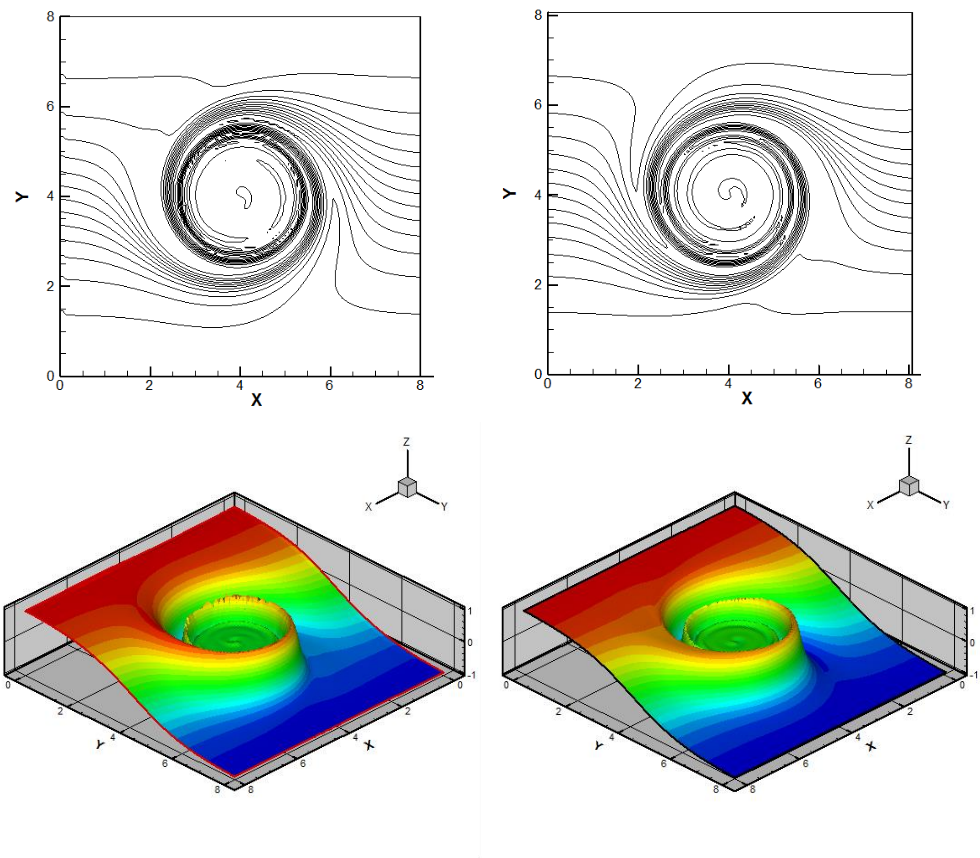


図 6.　二次元移流シミュレーション結果　WENO scheme(左) CIP(右)

図 6 にシミュレーション結果を示した。今回のシミュレーションは WENO scheme が 5 次精度、CIP-SCL が 2 次精度となっている。この結果より WENO scheme を使用したシミュレーションでは、鋭いプロファイルが得られていることが分かった。これに対し精度の低い CIP-SCL では若干滑らかなプロファイルが得られた。二次元移流方程式のシミュレーションにおいて、WENO scheme を使用することができ、精度の高い結果が得られることも確認された。

６．　まとめ

今回は非圧縮性流体での CFD の精度向上を目的として、移流方程式に WENO scheme を適用した。基礎段階として、一次元、二次元の移流計算を WENO scheme で解くことができた。しかし、５．３(ⅱ)で示した Flux の計算方法が複数あり、今回はそのうちの一つを試験的に使用しているため、実際に広島大学での CFD に適用した際に正確な結果となるか不明である。そのため他の Flux 計算も検証する必要がある。また、広島大学での CFD に適用するためには不等間隔格子での計算が必要になる。今回の研修中にも不等間隔格子での計算は検証したが、時間の関係上、終了していない。こちらも今後検証を続ける必要がある。最終的には現在行っている CFD に WENO scheme を適用し CIP との比較を行いたいと考える。

７．　謝辞

海外共同研究を通し、初めて一人で海外へ行き、渡航の準備から研究まで普段経験できないような貴重な数多くの経験ができました。このような機会を与えてくださった先生方、並びにサポートしてくださった皆様に感謝の意を表します。特に研究を行うにあたり、様々な指導、ご鞭撻を頂いた尾形

先生、西田先生並びに現地で指導および世話してくださった Eric Johnsen 先生、研究室の方々に深く感謝します。皆様のおかげで 1 ヶ月充実した日々を過ごすことができました。本当にありがとうございました。最後に全面的に応援、サポートしてくれた家族にも感謝の意を表します。