高等学校 数学科（数学Ⅱ） 学習指導案

指導者　富永　和宏

日　　時　平成 29 年 10 月 14 日（土）　第 2 限　10：35～11：25

場　　所　数学教室

学年・組　高等学校Ⅱ年 1 組 40 人（男子 18 人　女子 22 人）

単　　元　図形と方程式

目　　標

１．線分の内分点，外分点や２直線が平行や垂直になるときの条件，円の方程式，不等式の表す領域について理解する。（知識・理解）

２．与えられた条件を満たす直線や円の方程式，点の座標を求めることができる。さらに，与えられた条件を満たす点の集合として軌跡を求めることができる。また，与えられた不等式が表す領域を図示することができる。（数学的な技能）

３．軌跡や領域が条件を満たす点の集合であるという見方ができるとともに，その見方と図形的な性質を利用して，領域内の点において与えられた式のとる最大値や最小値を求めることなどができる。（数学的な見方や考え方）

指導計画（全 18 時間）

第一次　点と直線　5 時間

第二次　円　5 時間

第三次　軌跡と領域　6 時間

第四次　課題学習　図形の操作と方程式　2 時間（本時 2/2）

授業について

任意の有理数や平方根の長さをもつ線分を定規とコンパスで作図することは，数学 A で学習する。これにより，２次方程式の実数解を作図で示すことはできるが，任意の立方根は作図できないので，任意の３次方程式の実数解を作図で示すことはできない。ところが，折紙では「与えられた定点 P，Q を，それぞれ与えられた定直線 l，m 上にくるように折る」という操作ができるので，それを利用すれば３次方程式の実数解を折り目で示すことができる。

本時は，単元のまとめとして位置づけた課題学習「図形の操作と方程式」の２時間目で，折紙の折り目が３次方程式の実数解を表す理由を図形の方程式を用いて考察する。本時のねらいは，事象の中にある数理的な要素を見いだし，周囲と協力しながら，これまでに学習した内容を活用して考察を深めることのよさを実感することである。このような学習活動を通して，思考力や判断力，協働して課題を解決する力などを高めるとともに，身の回りの事象に対する数理的な見方や考察する態度を育み，学びに向かう力を伸ばしていきたい。

また，本時のような学習活動を行うことは，課題に対して数学的な見方・考え方を働かせ，見通しをもって主体的に解決に取り組むだけでなく，考察から得られた内容を周りと議論することなどを通して，さらに深めたり発展させたりすることができる。このような学習活動を行うことが，今回の数学科の主題である「数学的な見方・考え方を重視した数学的活動による深い学び」の一例になると考えている。

題　　目　　折紙で解く３次方程式

本時の目標

折紙の折り目が３次方程式の実数解を表す理由や折紙における操作がもつ数学的な意味について，図形の方程式を用いて考察を深めることができる。（数学的な見方や考え方）

本時の評価規準（観点／方法）

1．折紙の折り目が３次方程式の実数解を表す理由を，図形の方程式を用いて考察することができる。（数学的な見方や考え方／様相観察，ワークシート）
2．条件を満たす折り方が何通りあるかをグループで協力して調べたり，なぜそれだけしか折ることができないのかを話し合うことを通して，３次方程式の実数解の個数について考察することができる。（数学的な見方や考え方／様相観察，ワークシート）

本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） 折紙を用いた 3 次方程式の解法（15 分）	1. 方程式の係数から定まる点と直線をﾄﾚｰｼﾝｸﾞﾍﾟｰﾊﾟｰに写し取り，それぞれが重なるような折り目を求める。〔個人〕	・作業の手順は配布するﾜｰｸｼｰﾄに記載する。グラフ用紙には予め座標軸をかいておく。
（展開） 折り目が実数解を表す理由についての考察 （20 分）	2. ﾜｰｸｼｰﾄの内容に添って，点の座標や直線の式を用いて，折り目が実数解を表す理由を考察する。〔グループ〕	・ｸﾞﾙｰﾌﾟで協力して，ﾜｰｸｼｰﾄの課題を解き進めたり，気づきを話し合ったりするなど，考察を深めさせる。
折紙を用いた 3 次方程式の解の判別（10 分）	3. 与えられた３次方程式について，実数解を示す折り目がいくつできるか調べる。 〔個人→ｸﾞﾙｰﾌﾟ〕 4. 方程式の定数項が 0～2 のときと 2 より大きいときの実数解の個数を折り紙を用いて調べる。〔ｸﾞﾙｰﾌﾟで分担〕	・２重解を持つ３次方程式 $x^3-3x+2=0$ を与える。 ・実数解を示す折り目が 2 つしかないことを説明するには，適当に折り目を探しただけでは不十分なことを指摘する。 ・調べた結果についてｸﾞﾙｰﾌﾟ内で話し合うようにする。
（まとめ） 片方の点が直線上に来るように折り目を動かすときの他方の点の移される位置の観察と３次方程式の解の判別（5 分）	5. 片方の点が直線上に来るように折るとき，他方の点が移される位置を観察し，移される点の x 座標に注目すれば３次方程式の実数解の個数を調べることができることを確認する。　〔全体〕	・グラフソフトを利用して点の移される位置を示す。 ・３次方程式の解の判別は，今後学習する微分法を利用する方法もあることを紹介する。
備考　使用教具　　　ノートＰＣ，電子黒板，トレーシングペーパー，グラフ用紙 　　　使用ソフト　　関数グラフソフト GRAPES 7.21		

なお，本時の構成にあたり，下記の資料を参考にした。

・森継 修一「折紙による 3 次方程式の解法について」日本応用数理学会論文誌 vol 16, pp79-92，2006

数学Ⅱ　課題学習「折り紙で解く３次方程式」（参考資料）

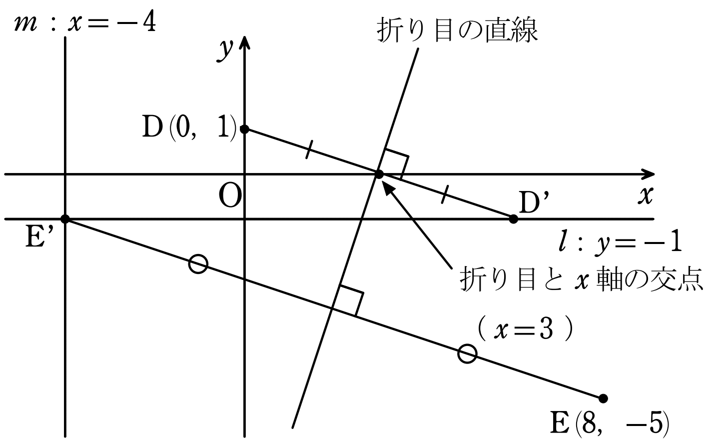
３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は，次の手順にしたがって折り紙を折ると実数解を求めることができる。

> 手順①　xy平面上に点 D$(0,\ 1)$，E$(-a+c,\ b)$ をとる。
> 手順②　xy平面上に直線 $l: y=-1$，$m: x=-a-c$ をとる。
> 手順③　点 D が直線 l 上に，点 E が直線 m 上にくるように紙を折り，折り目をつける。
> 手順④　③の折り目と x 軸の交点 F の x 座標が，方程式の実数解になる。

実際に，方程式 $x^3-2x^2-5x+6=0$ で試してみよう。

step 1　まず，配られたグラフ用紙に，点 D$(0,\ 1)$，E$(8,\ -5)$，直線 $l: y=-1$，$m: x=-4$ をかく。
step 2　トレーシングペーパーに点 D，E，直線 l，m を写し取る。
step 3　点 D が直線 l 上に，点 E が直線 m 上にくるようにトレーシングペーパーを折り，折り目をつける。
step 4　トレーシングペーパーをグラフ用紙にあて，折り目と x 軸の交点 F の x 座標を調べる。

折り紙で求めた解は $x=-2,\ 1,\ 3$
である。（右のグラフは $x=3$ のときの図）

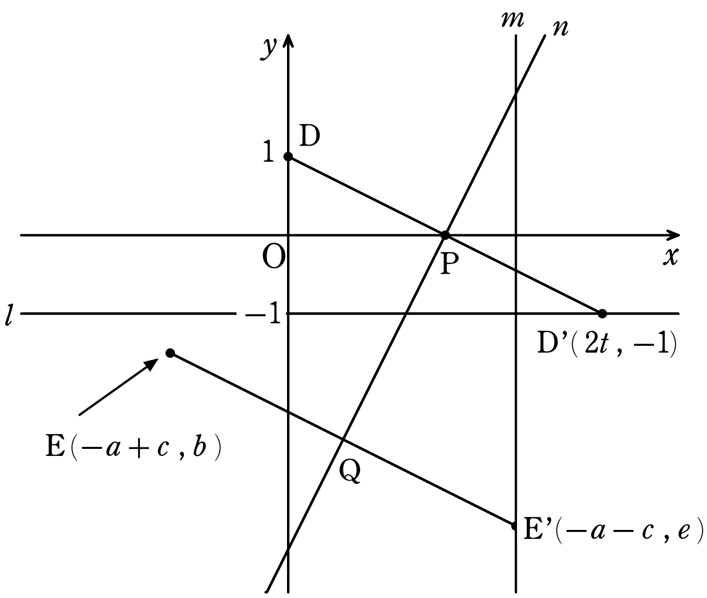


では，なぜこの手順で折り紙を折ると３次方程式の解が求まるのか？　その理由を考察してみよう。

右図のように，点 D，E が折り紙で直線 l，m 上の点 D'$(2t,\ -1)$，E'$(-a-c,\ e)$ に移るとする。

(1)　線分 DD' の中点 P，線分 EE' の中点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

（答）P$(t,\ 0)$，Q$\left(-a,\ \dfrac{b+e}{2}\right)$



(2)　このとき，折り紙の折り目は線分 DD’，EE’ の垂直二等分線である直線 PQ となる。
この折り目となる直線 PQ を n とする。

① n は線分 DD’ の垂直二等分線であることから，n の方程式を t を用いて表せ。（ただし，$t \neq 0$ とする）

（答）DD’ の傾きは　$\dfrac{-2}{2t}=-\dfrac{1}{t}$　　よって，n の傾きは t

また，n は DD’ の中点 P$(t,\ 0)$ を通るので，n の方程式は　$y=t(x-t)$

② n は線分 EE’ の中点 Q を通ることから，$b+e$ の値を t を用いて表せ。

（答）$y=t(x-t)$ が Q$\left(-a,\ \dfrac{b+e}{2}\right)$ を通るので　$\dfrac{b+e}{2}=t(-a-t)$

よって　$b+e=-2t(a+t)$

③ DD’∥EE’ であることから，$b-e$ の値を t を用いて表せ。

（答）EE’ の傾きは $\dfrac{e-b}{(-a-c)-(-a+c)}=\dfrac{e-b}{-2c}=\dfrac{b-e}{2c}$

DD’∥EE’ より　$\dfrac{b-e}{2c}=-\dfrac{1}{t}$

よって　$b-e=-\dfrac{2c}{t}$

④　②，③ で求めた値より，b の値を t を用いて表せ。

（答）$b+e=-2t(a+t)$，$b-e=-\dfrac{2c}{t}$ より　$2b=-2t^2-2at-\dfrac{2c}{t}$　　よって　$b=-t^2-at-\dfrac{c}{t}$

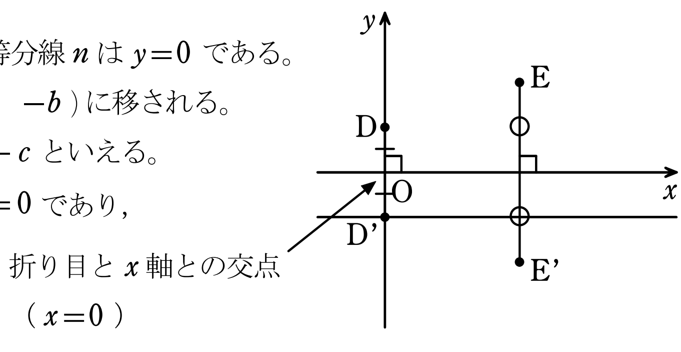
(3)　どうすれば，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標が，方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解であることを説明できるか考えよう。（班で相談してみよう）

（答）n と x 軸との交点は P$(t,\ 0)$ であるから，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標は t

ここで，④ より　$b=-t^2-at-\dfrac{c}{t}$　よって　$t^3+at^2+bt+c=0$

すなわち，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標 t は，方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解である。

（補足）
$t=0$ になるときは，D’$(0,\ -1)$ であり，DD’ の垂直二等分線 n は $y=0$ である。
よって，n で折り返せば E$(-a+c\ ,\ b)$ は E’$(-a+c\ ,\ -b)$ に移される。
E’ の x 座標は $-a-c$ であることから，$-a+c=-a-c$ といえる。
よって，$c=0$　　したがって，方程式は $x^3+ax^2+bx=0$ であり，
$t=0$ はこの方程式の解である。
（右図は　$x^3-3x^2+2x=0$ で，$t=0$ のとき）



次に，３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数を，折り紙を使って調べてみよう。

方程式 $\underline{\quad x^3-3x+k=0 \quad}$ について，$k=2$ のときの実数解を折り紙を使って求めてみると，点 D が直線 l 上に，点 E が直線 m 上にくるようにつけることのできる折り目は $\underline{\quad 2 \quad}$ 本なので，実数解は $\underline{\quad 2 \quad}$ 個であると予想できる。実際，折り紙で求めた解は $\underline{\quad x=1,\ -2 \quad}$ である。

（因数分解すると $(x-1)^2(x+2)=0$ であることからも確かめられる）

では，$0 \leqq k < 2$ や $k>2$ のときは，方程式の実数解の個数はいくつになるだろうか。

試しに $k=1$ や $k=3$ のときなどの実数解の個数を折り紙を用いて調べてみよう。

$k=1$ のときの実数解（近似値でよい）は $\underline{\quad x=1.55,\ 0.35,\ -1.90 \quad}$ の $\underline{\quad 3 \quad}$ 個

$k=3$ のときの実数解（近似値でよい）は $\underline{\quad x=-2.1 \quad}$ の $\underline{\quad 1 \quad}$ 個

調べた結果から，$k \geqq 0$ のとき，方程式 $\underline{\quad x^3-3x+k=0 \quad}$ の解は

$\underline{\quad 0 \leqq k < 2 \quad}$ のとき，異なる３つの実数解

$\underline{\quad k=2 \quad}$ のとき，異なる２つの実数解（２重解が１つと他の実数解が１つ）

$\underline{\quad k>2 \quad}$ のとき，１つの実数解と異なる２つの虚数解　　　　であると考えられる。

【補足１　折り紙による解の判別】

方程式 $x^3-3x+k=0$ の折り紙において，D$(0,\ 1)$ が D'$(2t,\ -1)$ に移されるような折り目 n は，$t \fallingdotseq 0$ とすると DD' の傾きが $-\dfrac{1}{t}$ で，DD' の中点 P が $(t,\ 0)$ であるから，(2) の ① と同じく　$n:y=t(x-t)$　とできる。

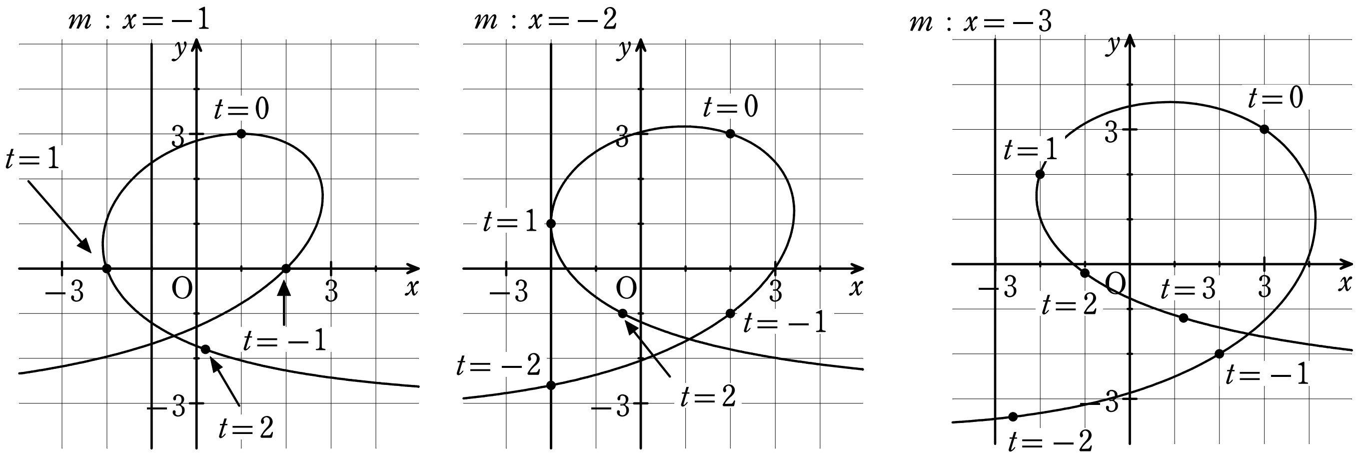
この n によって点 E$(k,\ -3)$ が点 E'$(p,\ q)$ に移されるとすれば，EE' の傾きも $-\dfrac{1}{t}$ であるから

$$\frac{q+3}{p-k}=-\frac{1}{t} \qquad \text{整理して} \quad q=-\frac{p}{t}+\frac{k}{t}-3 \quad \cdots\cdots ①$$

また，EE' の中点が n 上にあることから　$\dfrac{q-3}{2}=t\left(\dfrac{p+k}{2}-t\right)$　　整理して　$q=pt+kt-2t^2+3$　$\cdots\cdots$②

①，②より　$p=\dfrac{2t^3-kt^2-6t+k}{t^2+1}$，$q=\dfrac{-3t^2+2kt-2t+3}{t^2+1}$

ここで，t を媒介変数として動かしたときに E' のえがく軌跡は，下図のようになる。



$k=1$ のとき　　$k=2$ のとき　　$k=3$ のとき

図からもわかるように，E' の x 座標 すなわち p の値は $t=1$ の近くで極小となり，極小値は約 -2 である。

また，$t=1$ のときの p の値は k の値に関わらず -2 である。

つまり，3次方程式 $x^3-3x+k=0$ が実数解を何個持つかを調べるには， $t=1$ の前後での p の極小値と E' の移る直線 m ：$x=-k$ との大小関係を見ればよいことがわかる。厳密には極小値を求めるために微分の計算が必要になるが，今回の学習では，$t=1$ のときの p の値の -2 が境目になることが直観的に感じ取れればよいと考えている。

【補足２　3次方程式の解の判別式】

係数がすべて実数の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の判別式 D は b^2-4ac であり，これは解の公式の根号の中の式と同じであると理解されている。ここで，2次方程式の解を α，β とすると，解の公式より

$\alpha-\beta=\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　または　$\alpha-\beta=-\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　であるから，$\dfrac{D}{a^2}=(\alpha-\beta)^2$　とすることができる。

ここで $a^2>0$ より，D の正負と $(\alpha-\beta)^2$ の正負は一致することがわかる。

α と β が異なる実数であれば $\alpha-\beta$ は0でない実数だから $(\alpha-\beta)^2$ は正になり，

α と β が共役な複素数であれば $\alpha-\beta$ は純虚数になるから $(\alpha-\beta)^2$ は負になる。

α と β が一致するときは $\alpha-\beta$ は0だから $(\alpha-\beta)^2$ も0になる。

つまり，「解の判別には，解の差を2乗したものの符号を調べればよい」ということが言える。

この発想は3次方程式でも適用できる。3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γ とすると

(1)　α，β，γ が互いに異なる実数だとすると，$\alpha-\beta$，$\beta-\gamma$，$\gamma-\alpha$ はすべて0でない実数になるから $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ は正である。

(2)　α，β，γ のうちどれかが一致するときは，$\alpha-\beta$，$\beta-\gamma$，$\gamma-\alpha$ のうちどれかが0になるから $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ は0である。

(3)　α，β，γ のうち α だけが実数で β と γ が共役な複素数のときは，$\beta=p+qi$，$\gamma=p-qi$　(p，q は実数）とすると $\alpha-\beta=(\alpha-p)-qi$，$\alpha-\gamma=(\alpha-p)+qi$　より，$\alpha-\beta$ と $\alpha-\gamma$ は共役な複素数である。

よって，$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2=(\alpha-p)^2+q^2>0$ とできる。（$q\neq0$ だから）

さらに $\beta-\gamma=2qi$ で純虚数であるから $(\beta-\gamma)^2$ は負になり，$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ も負である。

これを，本時の課題　$x^3-3x+k=0$ に当てはめると，3次方程式の解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$，$\alpha\beta\gamma=-k$　である。

ここで，
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)&=-\beta^2+\beta(\alpha+\gamma)-\alpha\gamma\\&=-\beta^2+\beta(-\beta)-\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha\beta+\beta\gamma)\}\\&=-2\beta^2-\{-3-\beta(\alpha+\gamma)\}\\&=-2\beta^2-\{-3-\beta(-\beta)\}=-3\beta^2+3\end{aligned}$$

同様にして　$(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=-3\gamma^2+3$，$(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=-3\alpha^2+3$ であるから，

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2&=(-3\alpha^2+3)(-3\beta^2+3)(-3\gamma^2+3)\\&=-27\{\alpha^2\beta^2\gamma^2-(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-1\}\quad\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

ここで　$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=9$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6$　　　であるから

$(*)=-27\{(-k)^2-9+6-1\}=-27(k^2-4)$

したがって，$x^3-3x+k=0$ が重解を持つのは　$k=\pm2$ のときであることがわかる。

【補足３　３次方程式の解の求め方（カルダノの方法）】

本時の課題　$x^3-3x+k=0$ で $k=1$ のときの解を，カルダノの方法を用いて求めてみよう。

$x^3-3x+1=0$ において，$x=u+v$ とおくと　　$(u+v)^3-3(u+v)+1=0$　……①

整理して　$u^3+v^3+3(u+v)(uv-1)+1=0$

よって　$u^3+v^3=-1$ かつ $uv=1$ であるような u と v を求めれば，その u と v は方程式①の解になる。

ここで　$u^3+v^3=-1$ かつ $u^3v^3=1$ と考えれば，u^3 と v^3 を解に持つ2次方程式は

$t^2+t+1=0$ ……② である。

②の解は　$t=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから，$u^3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると，複素数の極形式を考えて

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$　と表すことができる。

すなわち，$u^3=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$　より

$u=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$，$\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ$，$\cos 280^\circ+i\sin 280^\circ$　　という解が得られる。

（※この部分には数学Ⅲの複素数平面の学習内容を使っている）

このとき $v=\dfrac{1}{u}$ より，$u=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$ のときは　$v=\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ)=\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ$

よって　$x=u+v=(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)+(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)=2\cos 40^\circ$

他も同様に　$u=\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ$ のときは　$v=\cos 160^\circ-i\sin 160^\circ$　から　$x=2\cos 160^\circ$

$u=\cos 280^\circ+i\sin 280^\circ$ のときは　$v=\cos 280^\circ-i\sin 280^\circ$　から　$x=2\cos 280^\circ$　である。

したがって，３次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解は　$x=2\cos 40^\circ$，$2\cos 160^\circ$，$2\cos 280^\circ$　である。

また，$u^3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると，$u^3=\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)$ より　$u=\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ)$　となる。

このとき，$v=\dfrac{1}{u}=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$ であるから，

$x=u+v=\{\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ)\}+(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)=2\cos 40^\circ$　　で同じ値が得られた。

他の解も同様である。

上記の結果は，三角関数の３倍角の公式　$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　から確かめることもできる。

$\theta=40^\circ$ とすると　$\cos^3\theta=\dfrac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}$ から，$\cos^3 40^\circ=\dfrac{\cos 120^\circ+3\cos 40^\circ}{4}$

両辺を８倍して変形すると　$8\cos^3 40^\circ-6\cos 40^\circ-2\cos 120^\circ=0$

すなわち　$(2\cos 40^\circ)^3-3(2\cos 40^\circ)+1=0$

よって　$2\cos 40^\circ$ が３次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解であることが示された。

数学Ⅱ　課題学習「折り紙で解く３次方程式」ワークシート　　Ⅱ年＿＿組＿＿＿番＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は，次の手順にしたがって折り紙を折ると実数解を求めることができる。

> 手順①　xy平面上に点 D(0, 1)，E$(-a+c,\ b)$ をとる。
> 手順②　xy平面上に直線 $l:y=-1$，$m:x=-a-c$ をとる。
> 手順③　点 D が直線 l 上に，点 E が直線 m 上にくるように紙を折り，折り目をつける。
> 手順④　③の折り目と x 軸の交点 F の x 座標が，方程式の実数解になる。

実際に，方程式＿$x^3-2x^2-5x+6=0$＿＿＿＿＿＿で試してみよう。

step 1　まず，配られたグラフ用紙に，点 D，E，直線 l，m をかく。
step 2　トレーシングペーパーに点 D，E，直線 l，m を写し取る。
step 3　点 D が直線 l 上に，点 E が直線 m 上にくるようにトレーシングペーパーを折り，折り目をつける。
step 4　トレーシングペーパーをグラフ用紙にあて，折り目と x 軸の交点 F の x 座標を調べる。

折り紙で求めた解は＿＿$x=-2,\ 1,\ 3$＿＿＿＿＿＿である。

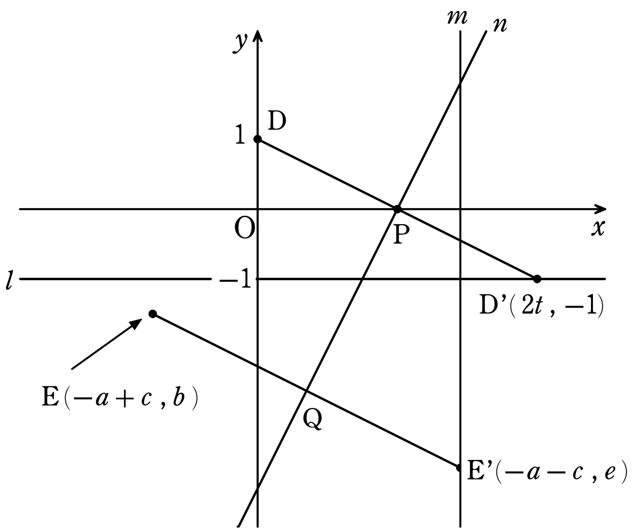
※解が求まったら，周りの人と比べてみよう。また，その値は本当に３次方程式の解になっているか確かめてみよう。
【比べて気がついたことがあれば，メモしておこう】

では，なぜこの手順で折り紙を折ると３次方程式の解が求まるのか？　その理由を考察してみよう。

右図のように，点 D，E が折り紙で直線 l，m 上の点 D’$(2t,\ -1)$，E’$(-a-c,\ e)$ に移るとする。

(1)　線分 DD’ の中点 P，線分 EE’ の中点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(答) $P(t,\ 0)$，$Q\left(-a,\ \dfrac{b+e}{2}\right)$



(2)　このとき，折り紙の折り目は線分 DD’，EE’ の垂直二等分線である直線 PQ となる。
この折り目となる直線 PQ を n とする。

① n は線分 DD’ の垂直二等分線であることから，n の方程式を t を用いて表せ。（ただし，$t\fallingdotseq 0$ とする）

(答) DD’ の傾きは $\dfrac{-2}{2t}=-\dfrac{1}{t}$　よって，n の傾きは t

また，n は DD’ の中点 $P(t,\ 0)$ を通るので，n の方程式は　$y=t(x-t)$

② n は線分 EE’ の中点 Q を通ることから，$b+e$ の値を t を用いて表せ。

(答) $y=t(x-t)$ が $Q\left(-a,\ \dfrac{b+e}{2}\right)$ を通るので　$\dfrac{b+e}{2}=t(-a-t)$

よって　$b+e=-2t(a+t)$

③ DD’∥EE’ であることから，$b-e$ の値を t を用いて表せ。

(答) EE’ の傾きは $\dfrac{e-b}{(-a-c)-(-a+c)}=\dfrac{e-b}{-2c}=\dfrac{b-e}{2c}$

DD’∥EE’ より　$\dfrac{b-e}{2c}=-\dfrac{1}{t}$

よって　$b-e=-\dfrac{2c}{t}$

④ ②，③の結果より，b の値を t を用いて表せ。

(答) $b+e=-2t(a+t)$，$b-e=-\dfrac{2c}{t}$ より　$2b=-2t^2-2at-\dfrac{2c}{t}$　　よって　$b=-t^2-at-\dfrac{c}{t}$

(3)　どうすれば，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標が，方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解であることを説明できるか考えよう。（班で相談してみよう）

(答) n と x 軸との交点は $P(t,\ 0)$ であるから，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標は t

ここで，④より　$b=-t^2-at-\dfrac{c}{t}$　よって　$t^3+at^2+bt+c=0$

すなわち，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標 t は，方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解である。

（補足）$t=0$ になるときは，DD' の垂直二等分線 n は $y=0$ であるから，n で折り返せば E$(-a+c\,,\ b)$ は E'$(-a+c\,,\ -b)$ に移される。E' の x 座標は $-a-c$ となることから，$-a+c=-a-c$ といえる。

よって，$c=0$　　したがって，方程式は $x^3+ax^2+bx=0$ であり，$t=0$ はこの方程式の解である。

次に，３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数を，折り紙を使って調べてみよう。

方程式 ＿$x^3-3x+k=0$＿ について，$k=2$ のときの実数解を折り紙を使って求めてみると，
点 D が直線 l 上に，点 E が直線 m 上にくるようにつけることのできる折り目は＿2＿本なので，実数解は
＿2＿個であると予想できる。実際，折り紙で求めた解は＿$x=1$，-2＿である。

※ どうすれば，折り目をもれなく探すことができるだろうか？　周りの人と相談してみよう。

【相談して気がついたことがあれば，メモしておこう】

では，$0\leqq k<2$ や $k>2$ のときは，方程式の実数解の個数はいくつになるだろうか。
試しに $k=1$ や $k=3$ のときなどの実数解の個数を折り紙を用いて調べてみよう。（班の中で役割を分担しよう）

$k=1$ のときの実数解（近似値でよい）は＿$x=1.55$，0.35，-1.90＿の＿3＿個
$k=3$ のときの実数解（近似値でよい）は＿$x=-2.1$＿の＿1＿個

※ k の値と折り目の本数の関係に見通しがついたら，周りの人と比べてみよう。また，その理由についても相談してみよう。【比べて気がついたことがあれば，メモしておこう】

上記のことから，$k\geqq 0$ のとき，方程式 $x^3-3x+k=0$ の解は

＿$0\leqq k<2$＿ のとき，異なる３つの実数解
＿$k=2$＿ のとき，異なる２つの実数解（２重解が１つと他の実数解が１つ）
＿$k>2$＿ のとき，１つの実数解と異なる２ つの虚数解　　　であると考えられる。

【授業の振り返り】

本時のまとめ

【授業後のアンケート】

(1)　今日の授業に対するあなたの取り組み具合はどの程度でしたか？

よく取り組んだ　　　普通　　　取り組まなかった

(2)　今日の課題について，あなたはしっかり考えることができましたか？

しっかり考えた　　　普通　　　考えなかった

(3)　今日の授業で，あなたは学びを深めることができましたか？

できた　　　普通　　　できていない

今日の授業について，感想を述べてください。

実践上の留意点

１．授業説明

広島大学大学院理学研究科の木村俊一教授より，折り紙を用いれば３次方程式を解くことができるという助言をいただき，参考文献を基に今回の授業を設計した。

この授業では，折り紙で方程式を解くことができることを体験させ「なぜ折り紙をすれば方程式の解を求めることができるのか？」という疑問について，個人で考え，さらに周りと話し合い意見を練り上げていく過程を経て答えにたどり着くことで，深い学びを実現できると考えた。現実の事象について数学を利用して考察することが授業の出発点と言える。

また，本時も含める課題学習「図形の操作と方程式」では，方程式の有用性などのよさを実感することをねらいとしている。本時は因数定理が使えない方程式でも，折り紙を使えば（正確な値は出ないが）解くことができることを知り，その面白さを実感させたかった。

残念だったのは，授業の最後の部分（３次方程式の解の個数を折り紙で考察する部分）の時間が足りず，十分にできなかったことである。この部分は次の時間に持ち越しになるが，方程式の解を示すには折り紙が有効であることを今一度生徒と確認したい。評価できる部分としては，一部の生徒の間ではあったが，生徒の話し合い活動が深い学びにつながる場面が認められたことである。今後もこのような活動を積極的に取り入れ，深い学びが実現できるような学習を行って行きたい。

２．研究協議より

・本時では，示された手順通りに折り紙を折ればなぜ３次方程式の解を求めることができるのかということを，ワークシートを使ってステップ形式で生徒に考えさせていたが，その方法をとった理由は何か？

→ワークシートに頼らずに「なぜ，このような折り方をすれば３次方程式の解が求まるのだろう？」と，もっと自由に生徒に考えさえる方法もあるとは考えたが，その方法では何をしたらよいか分からない生徒も少なからず出ると思い，ワークシートを使って活動させることにした。ねらいとしては，ワークシートの(2)④までは解き進めている状態で，本時の最も考えさせたい問いである「(3) どうすれば，折り目の直線 n と x 軸との交点の x 座標が，方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解であることを説明できるか考えよう」に取り組ませたかった。

・折り紙の手順１，２に関して，なぜこのような手順を踏むのかを生徒が疑問に思った際にはどのように対処するつもりだったのか？

→手順１，２に関しては，３次方程式の解を折り紙で求めるための条件設定であり，折り方を変えれば，この設定以外の方法でも 3 次方程式の解を折り紙で求めることは可能であることを伝えるつもりである。その上で，示された手順通りに折っていけばどうして 3 次方程式の解が求まるのか，折り紙で行う操作は方程式ではどのように表されるのかを考えさせようと

思っていた。折り紙という現実場面の操作と点の座標や方程式が対応していることを生徒に実感してもらいたいと考えている。

・最初に折り紙で求めた解が本当に解であるかを追及せず，解の個数にこだわった意図は？

→折り紙で３次方程式を解くことができるということに絞って扱う授業の構成も考えたし，時間的にも厳しいのでその方がすっきりするとも思ったが，実数解の個数についても考えることで発展的な学習の可能性を示すというか，疑問の余地を残すことでやる気のある生徒の活動を期待するという「わざとモヤモヤ感を残す学習」を狙った。

・グループワークの際に，机をつけることなく，話し合い活動を進めたことはなぜか？

→誰かが発表する際は，発言する生徒に注目させ話をきちんと聞かせるが，個人の活動も大切にしたいので，今回は机を移動させずに活動させた。グループでの話し合いでは，まずは自分の考えを持つことが大切であると考えているので，個人の活動を弱めたくなかった。

・折り目と方程式の解がつながるという，図形と方程式の関連を教材化した授業であった。もっと時間があれば，主体的で深まりのある授業になったと思う。特に「何を示せば折り目が方程式の解を説明することができるか」という問いがこの授業のキーワードであり，生徒がここを意識してステップ形式の問題を解いていたかが問われる部分である。一部の生徒はできていたが，そうとは言えない生徒も見受けられた。このキーワードが深い学びにつながるのではないか。