

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専 門 科 目 ( 午 前 )	受 験 番 号	M
---------	-----------------	---------	---

平成29年 8月 24日

9:00 ~ 12:00

## 注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている。

問題用紙 (表紙を含む)	4 枚
解答用紙	3 枚
下書き用紙	3 枚

2. 問題は全部で 3 問ある。

3. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い、それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ。紙面が不足した場合は裏面を使用してよい。

4. 試験問題の表紙、解答用紙、および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ。

5. 試験終了時には、すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること。

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専 門 科 目 ( 午 前 )	平 成 2 9 年 8 月 実 施
---------	-----------------	-------------------

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 行列  $M$  に対し, その転置行列を  ${}^tM$  で表す. 次のすべての問に答えよ.

(A)  $n$  次実正方行列全体のなす実ベクトル空間  $M_n(\mathbb{R})$  の線形変換  $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  を

$$f(X) = \frac{1}{2}(X - {}^tX)$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(1)  $f \circ f = f$  を示せ.

(2)  $f$  の固有値は 0 と 1 であることを示し, それぞれの固有値に対する固有空間の次元を求めよ.

(B)  $V$  を 3 次元複素線形空間とし,  $\{a, b, c\}$  をその基底とする.  $f: V \rightarrow V$  は線形変換で

$$f(a) = 3a + c, \quad f(b) = 2a + b, \quad f(c) = -a + b - c$$

を満たすとする. 以下の問に答えよ.

(1) 基底  $\{a, b, c\}$  に関する  $f$  の表現行列  $A$  を求めよ.

(2)  $f$  の表現行列  $A$  のジョルダン標準形  $J$  と  $P^{-1}AP = J$  なる正則行列  $P$  を求めよ.

(C)  $A$  を  $m \times n$  実行列とし, 線形写像  $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を

$$f_1(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

により定め, また線形写像  $f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

$$f_2(x) = {}^tAAx \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(1)  $\text{Ker } f_1 = \text{Ker } f_2$  であることを示せ.

(2) 任意のベクトル  $b \in \mathbb{R}^m$  に対して,  $x \in \mathbb{R}^n$  に関する連立一次方程式  ${}^tAAx = {}^tAb$  は解を持つことを示せ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専 門 科 目 ( 午 前 )	平 成 2 9 年 8 月 実 施
---------	-----------------	-------------------

[ 2 ] 次のすべての問に答えよ.

- (A) (1) 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は 0 に収束するとする. このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0$  が成り立つことを示せ.
- (2) 正整数  $n, m$  に対して定積分  $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx$  および  $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx$  の値を計算せよ.
- (3)  $\mathbb{R}$  上の無限回微分可能な関数で, その  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  への制限が関数  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$  と一致するものが存在することを示せ.
- (4) 広義積分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$  は収束することを示せ.

(B) 平面  $\mathbb{R}^2$  の部分空間

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 + 4xy = 0 \}$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) 以下で定義された関数  $f$  は  $C$  上連続であることを示せ.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

- (2)  $C$  は  $\mathbb{R}^2$  において有界であることを示せ.

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午前)	平成29年8月実施
---------	-----------	-----------

[3] 次のすべての問に答えよ.

(A)  $\mathbb{R}$  上の関係  $\sim$  を

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある正の実数 } c \text{ が存在して } x = cy \text{ が成立する}$$

により定義する. 以下の問に答えよ.

- (1) 上で定義した  $\sim$  が  $\mathbb{R}$  上の同値関係であることを示せ.
- (2)  $\mathbb{R}$  を同値関係  $\sim$  で割った商集合を  $X$  とする.  $X$  の元を全て書け.
- (3)  $\mathbb{R}$  には標準的な位相が入っているものとする. また,  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow X$  を自然な射影とし,  $X$  には  $\pi$  から定まる商位相を入れる. この商位相に関して,  $X$  がハウスドルフ空間であるかどうかを判定せよ.

(B)  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  上の関数  $d$  を次で定義する.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$$

以下の問に答えよ.

- (1)  $d$  は  $\mathbb{R}$  上の距離を定めることを示せ.
- (2) 一点からなる  $\mathbb{R}$  の部分集合は  $d$  に関して開集合かどうかを判定せよ.
- (3)  $\mathbb{R}$  の部分集合  $K$  が  $d$  に関してコンパクトであるとする. このとき  $K$  は有限集合であることを示せ.

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻 専 門 科 目 ( 午 後 )

受 験 番 号 M

平成29年 8月 24日

13:30 ~ 16:30

## 注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている。

問題用紙 (表紙を含む)	9 枚
解答用紙	2 枚
下書き用紙	2 枚

2. 問題は全部で 8 問ある。この中から 2 問選んで解答せよ。

3. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い、それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ。紙面が不足した場合は裏面を使用してよい。

4. 試験問題の表紙、解答用紙、および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ。

5. 試験終了時には、すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること。

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成 29 年 8 月実施
---------	-----------	---------------

選択問題：次の [4] ~ [11] の 8 問中の 2 問を選んで解答せよ。

[4]  $R$  を単位元を持つ環とする。ただし、 $R$  は零環 (零元のみからなる環) ではないとする。ある  $a, b \in R$  により  $f(x) = ax + b$  と表されるような写像  $f: R \rightarrow R$  全体の集合を  $S$  とする。

- (1)  $f, g \in S$  に対し、和  $f + g: R \rightarrow R$  を  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  により定義する。この演算によって  $S$  が群になるかどうかを判定せよ。
- (2)  $f, g \in S$  に対し、積  $f \circ g: R \rightarrow R$  を  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  により定義する。この積と (1) で与えられた和によって、 $S$  が環となるかどうかを判定せよ。
- (3)  $R^\times$  で、 $R$  の積に関する可逆元のなす群 (すなわち乗法群) を表す。  $f \in S$  のうちで、 $f(x) = ax + b$ ,  $a \in R^\times, b \in R$  と表されるものの集合を  $T$  とする。(2) で与えられた積によって、 $T$  が群になることを示せ。
- (4) 上で定義された群  $T$  が可換になるような  $R$  の例を一つあげよ。
- (5)  $f \in S$  のうちで、 $b \in R$  により  $f(x) = x + b$  と書けるものの集合を  $U$  とすると、 $U$  は  $T$  の正規部分群となることを示せ。
- (6)  $T, U$  を上で定義された群とするとき、商群  $T/U$  を  $R$  を用いて記述せよ。
- (7)  $R$  を可換環とする。 $f \in S$  のうちで、 $R$  から  $R$  への全射となるものの集合を  $W$  とする。 $W$  が積  $\circ$  に関して群となるかどうかを判定せよ。

## 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成29年8月実施
---------	-----------	-----------

[5] 虚数単位  $\sqrt{-1}$  を  $i$  で表す.  $K = \mathbb{Q}(i) = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  を有理数体  $\mathbb{Q}$  に  $i$  を添加した体とする. 以下のすべての問に答えよ.

(1)  $K$  の元  $\alpha$  であって  $\alpha^2 = 4+3i$  となるものは存在しないことを示せ.

以下,  $\eta \in \mathbb{C}$  であって  $\eta \notin K$ ,  $\eta^2 = a+bi \in K$  (ただし  $a, b \in \mathbb{Q}$ ) となるものを一つ固定し,  $L = K(\eta)$  とする.

(2) 拡大次数  $[L:\mathbb{Q}]$  を求めよ.

(3) 任意の  $\alpha \in K \setminus \{0\}$  に対し,  $\eta' = \alpha\eta$  とおくと,  $K(\eta') = L$  であることを示せ.

以下,  $L$  が  $\mathbb{Q}$  上ガロア拡大であると仮定し, そのガロア群を  $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  とおく.

(4)  $\sigma \in G$  に対して,  $\sigma(K) = K$  であることを示せ.

(5)  $\sigma \in G$  に対して,  $\sigma(\eta) = \alpha + \beta\eta$  (ただし  $\alpha, \beta \in K$ ) と表すとき,  $\alpha = 0$  であることを示せ.

(6)  $\sigma \in G$  であって  $\sigma$  の  $K$  への制限  $\sigma|_K$  が  $K$  の恒等写像とならないものが存在する. 理由を述べよ. また, この  $\sigma$  について  $(\sigma(\eta)/\eta)^2$  を  $a, b$  を用いて表せ.

(7) ある  $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  に対して  $a^2 + b^2 = c^2$  となることを示せ.

(8)  $a = 4, b = 3$  のとき,  $L$  は  $\mathbb{Q}$  上ガロア拡大であることがわかる (証明しなくてよい). ガロア群  $G$  の構造を求めよ.

## 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成 29 年 8 月 実施
---------	-----------	----------------

[ 6 ]  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  を  $\mathbb{R}^3$  内の単位球面とする. 点  $(0, 0, \alpha)$  (ただし  $\alpha > 1$ ) と  $S^2$  上の点  $(x, y, z)$  を通る直線と  $xy$  平面  $\mathbb{R}^2$  との交わりを  $f(x, y, z)$  とする. 次の間に答えよ.

(1)  $f$  を  $S^2$  から  $xy$  平面  $\mathbb{R}^2$  への写像と考えたとき,  $f$  の像  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^2$  を求めよ.

(2)  $f(x, y, z) = \left( \frac{\alpha x}{\alpha - z}, \frac{\alpha y}{\alpha - z} \right)$  と表されることを示せ.

(3)  $S^2$  の開集合  $S_+^2$  を  $S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}$  で定め, また  $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}$  とおく.  $S^2$  の局所座標  $\varphi: S_+^2 \rightarrow D$  を  $\varphi(x, y, z) = (x, z)$  で定める. このとき  $f \circ \varphi^{-1}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  のヤコビ行列の階数を求めよ.

(4)  $f$  は可微分多様体  $S^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への可微分写像であることを示せ.

(5)  $p = (x, y, z)$  を  $S^2$  上の点とする.  $a, b, c$  を  $a^2 + b^2 + c^2 = 1, ax + by + cz = 0$  を満たす実数とするとき,  $(a, b, c)$  は点  $p$  を始点とする  $S^2$  の単位接ベクトルとみなせる. 写像  $f$  の微分  $(df)_p$  で接ベクトル  $(a, b, c)$  を写した像が再び単位ベクトルになるための必要十分条件は  $c^2 = \frac{z(2\alpha - z)(\alpha - z)^2}{\alpha^2(\alpha^2 - 1)}$  であることを示せ. ただし, 接ベクトルの長さは  $\mathbb{R}^3$  の通常の長さで測るものとする.



## 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻

専門科目 (午後)

平成29年8月実施

[7] 正方形領域  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$  において, 各  $y \in [-1, 1]$  について, 点  $(-1, y)$  と点  $(1, -y)$  を同一視して得られる曲面を  $X$  とする. 次の間に答えよ.

- (1) 曲面  $X$  の普遍被覆とその被覆変換群を求めよ. また, それを用いて基本群  $\pi_1(X)$  を求めよ.
- (2) 曲面  $X$  と円板  $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  をその境界ではりあわせて得られる曲面を  $Y$  とする. ファン・カンペンの定理を用いて基本群  $\pi_1(Y)$  を求めよ.
- (3) 問題(2)で定義された曲面  $Y$  のホモロジー群をマイヤー・ビートリス完全系列を用いて計算せよ.
- (4) 曲面  $X$  と閉区間  $I = [0, 1]$  の直積空間  $X \times I$  は3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  に埋め込めないことを証明せよ.
- (5) 直積空間  $X \times I$  の4次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  への埋め込み  $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を一つ構成し, その像の補空間  $\mathbb{R}^4 - f(X \times I)$  の基本群  $\pi_1(\mathbb{R}^4 - f(X \times I))$  を求めよ.

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成 29 年 8 月 実施
---------	-----------	----------------

[ 8 ] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A)  $a, b, c, d$  を  $ad - bc \neq 0$  なる複素数,  $S$  をリーマン球面として

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in S$$

とおく. 次の問いに答えよ.

- (1)  $w(z)$  の零点を求めよ.
- (2)  $w(z)$  の極を求めよ.
- (3) 変換  $w : z \mapsto w(z)$  が 3 点  $0, 1, i$  をそれぞれ  $i, 0, 1$  にうつすとき,  $w(z)$  を求めよ.
- (4) (3) における  $w$  に対して,  $w^{-2}$  は 3 点  $0, 1, i$  をそれぞれ  $i, 0, 1$  にうつすことを示し, これから  $w^3 = \text{Id}$  を証明せよ. ただし,  $\text{Id}$  は恒等変換とする.

(B) 複素平面  $\mathbb{C}$  上の二つの開集合  $D$  と  $D'$  に対して,  $D$  から  $D'$  の上への単葉な正則写像  $f$  が存在するとき  $D$  と  $D'$  は同型であるといい,  $f$  を  $D$  から  $D'$  への同型写像という.

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

とするとき次を証明せよ.

- (1)  $\mathbb{C}$  と開円板  $\Delta$  は同型でない.
- (2)  $f(z)$  が  $z$  の多項式であつて, 変換  $z \mapsto f(z)$  が  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への同型写像であれば, 定数  $a \neq 0$  と  $b$  が存在して

$$f(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}$$

となる.

(3) 変換  $z \mapsto f(z)$  が開円板  $\Delta$  からそれ自身への同型写像であつて原点を固定するとき,

$$|f(z)| \leq |z|$$

がすべての  $z \in \Delta$  に対して成立する.

(4) (3) の  $f(z)$  に対して, ある実数  $\theta$  が存在して,

$$f(z) = ze^{i\theta}$$

がすべての  $z \in \Delta$  に対して成立する.

## 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数学専攻	専門科目 (午後)	平成29年8月実施
------	-----------	-----------

[9]  $\mu$  を  $\mathbb{R}$  上のルベーグ測度とする。以下のすべての間に答えよ。

(A)  $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  をルベーグ可測関数とする。

(1)  $\int_0^1 f(x) dx < \infty$  と  $\sum_{n=0}^{\infty} n \mu(A_n) < \infty$  は同値であることを示せ。ここで、

$$A_n = \{x \in [0, 1] \mid n \leq f(x) < n+1\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(2)  $\int_0^1 f(x) dx < \infty$  と  $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$  は同値であることを示せ。ここで、

$$B_n = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq n\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(B) (1) 正整数  $n$  に対し、 $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{1+n^2x^2} dx < \infty$  を示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{n \sin x}{1+n^2x^2} dx = 0$  を示せ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin x}{1+n^2x^2} dx = 0$  を示せ。

(C)  $E_1, E_2, E_3, \dots$  は、 $\mathbb{R}$  のルベーグ可測な部分集合の列とする。

(1)  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  であるとき、 $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$  を示せ。

(2)  $[0, 1] \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$  であるとき、 $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$  を示せ。

(3)  $A \subset [0, 1]$  を満たすルベーグ可測集合  $A$  に対し、 $B \subset A$  および  $\mu(B) = \frac{1}{2}\mu(A)$  を満たすルベーグ可測集合  $B$  が存在することを示せ。

## 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成 29 年 8 月実施
---------	-----------	---------------

[ 10 ]  $Z_1, Z_2$  をそれぞれ標準正規分布に従う互いに独立な確率変数とし、確率変数  $X$  と  $Y$  を以下のように定める。

$$X = \min\{Z_1, Z_2\}, \quad Y = \max\{Z_1, Z_2\}.$$

以下のすべての間に答えよ。ただし、 $\phi(x)$  と  $\Phi(x)$  はそれぞれ次式で与えられる標準正規分布の確率密度関数および分布関数とする。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

- (1)  $X$  と  $Y$  のそれぞれの確率密度関数を  $\phi(x)$  と  $\Phi(x)$  を用いて表せ。
- (2)  $Y$  の平均と分散を求めよ。
- (3)  $X$  の平均と分散を求めよ。
- (4)  $X^2, Y^2, Z_1^2$  の確率分布が等しいことを示せ。

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専 門 科 目 ( 午 後 )	平成 2 9 年 8 月 実 施
---------	-----------------	------------------

[ 11 ] 次の (A), (B) のすべての間に答えよ。ただし、常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする。

- (A) (1) 常微分方程式  $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$  の一般解を求めよ。(答だけでよい.)  
 (2) 常微分方程式  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$  の一般解を求めよ。(答だけでよい.)  
 (3) 常微分方程式  $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$  の一般解を求めよ。(答だけでよい.)

(B) 関数  $P, Q$  は  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数とする。  $y(x)$  に関する次の常微分方程式

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を考える。なお、任意の  $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  に対して、  $y(a) = b_1, y'(a) = b_2$  かつ  $\mathbb{R}$  上で (\*) を満たす  $C^2$  級実数値関数  $y$  がただ一つ存在することは証明なしに用いてよい。また、  $\mathbb{R}$  上の二つの実数値関数  $f, g$  が一次従属であるとは、ある  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  が存在して、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$  が成り立つことをいい、  $f, g$  が一次独立であるとは、  $f, g$  が一次従属でないことをいう。

- (1)  $y_1, y_2$  を (\*) の二つの解とし、  $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  とおく。このとき、  $W'(x)$  を、  $P(x), Q(x), W(x)$  のうち必要なものを用いて表せ。  
 (2)  $y_1, y_2$  を (\*) の二つの解とし、  $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  とおく。このとき、ある  $x_0 \in \mathbb{R}$  に対して  $W(x_0) = 0$  が成り立つならば、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $W(x) = 0$  であることを示せ。  
 (3)  $y_1, y_2$  を (\*) の二つの解とし、  $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  とおく。このとき、ある  $x_0 \in \mathbb{R}$  に対して  $W(x_0) = 0$  が成り立つならば、  $y_1$  と  $y_2$  は一次従属であることを示せ。  
 (4)  $\mathbb{R}$  上の  $C^2$  級実数値関数全体のなす実線形空間を  $C^2(\mathbb{R})$  とする。 (\*) の解全体の集合は、  $C^2(\mathbb{R})$  の 2 次元線形部分空間であることを示せ。  
 (5)  $u$  を、 (\*) の解ですべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し  $u(x) > 0$  を満たすものとする。このとき、 (\*) の解  $v$  で、  $u$  と一次独立であるものを一つ求めよ。