平成２９年度１０月入学及び平成３０年度４月入学
広島大学大学院理学研究科 入学試験問題

物理科学専攻	専門科目

受験番号	M

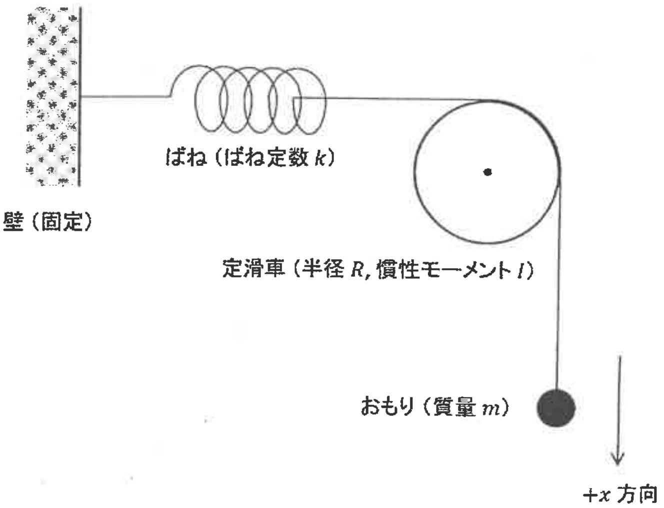
平成２９年 ８月２４日　　13:30 〜 16:30

注　意　事　項

1. 以下の用紙が配布されている。
   - 問題用紙（本表紙を含む。）　６枚
   - 解答用紙　４枚
   - 下書き用紙　１枚
2. 問題は[I]〜[IV]の４問である。全ての問題に解答せよ。ただし，[IV]量子力学については，問題用紙が２枚あることに注意せよ。
3. 問題ごとにそれぞれの解答用紙に解答せよ。解答の仕方が特に指定されている場合を除き，最終的な答だけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は，表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。
4. 解答用紙及び下書き用紙の全てに受験番号を記入せよ。
5. 試験終了時には，全ての解答用紙及び下書き用紙を提出せよ。

[I] 力学

右図のように，一端が壁に固定された軽いばね（ばね定数k）とおもり（質量m）を軽い糸でつなぎ，両者の間を定滑車（半径R，慣性モーメントI）に掛けて，おもりを鉛直方向に振動させる。糸は伸びることもたるむこともなく十分に長いものとし，ばねは自由に伸縮でき，かつ定滑車と糸は滑らないものとする。また，空気抵抗や滑車の回転の摩擦は無視できるものとする。重力加速度の大きさをgとし，ばねが自然長の状態からのおもりの変位をx（鉛直下方を正方向に取る）として，以下の問いに答えよ。



(1-1) 定滑車とおもりの間の糸の張力をTとして，おもりの鉛直方向の運動方程式と，定滑車の回転の運動方程式を，各々 k, m, R, I, g, x, Tのうち必要なものを用いて記せ。

(1-2) 小問（1-1）の運動方程式を連立して解き，この系の振動の固有角振動数を求めよ。

(2-1) この，ばね，おもり，定滑車が連結された三体系のラグランジアンLを，k, m, R, I, g, xを用いて表せ。

(2-2) この系のラグランジュ方程式を，Lに関する微分方程式の形で記し，さらにk, m, R, I, g, xを用いて書き下せ。

(2-3) 小問（2-2）のラグランジュ方程式を解き，この系の振動の固有角振動数を求めよ。

以下では，定滑車は一様密度の円板で，質量はMとし，その回転軸は重心を通り円板に垂直とする。

(3) 定滑車の回転軸の周りの慣性モーメントIを，R, Mを用いて表せ。

(4-1) 定滑車の質量$M \to 0$のとき，この系の振動の固有角振動数を求めよ。

(4-2) 定滑車の質量$M \to \infty$のとき，この系の振動の固有角振動数を求めよ。

[II] 電磁気学

まず、真空中を伝搬する電磁波について，以下の問いに答えよ。

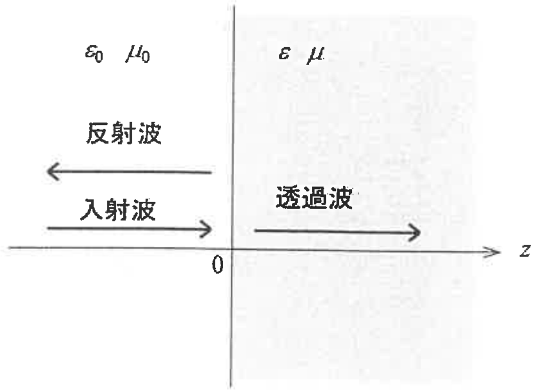
(1) 真空の誘電率をε_0，透磁率をμ_0とする。電場$\mathbf{E}$，磁束密度$\mathbf{B}$として，電荷も電流もない真空中でのマクスウェル方程式を示せ。

(2) (1)の答より，電磁波の電場の満たす波動方程式を導き出せ。
ここで，$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$ の関係を用いてよい。

(3) 真空中をz軸の正の方向に伝わる電磁波を考える。波数k，角振動数ωとし，電場はx方向のみの成分を持つとすると，$E_x(z,t)=E_0\exp\{i(kz-\omega t)\}$となり，$\mathbf{E}$は$(E_x,0,0)$で表される。この電磁波の磁束密度$\mathbf{B}(B_x,B_y,B_z)$を求めよ。
また，ω/kをε_0，μ_0を用いて表せ。

(4) (3)で表される電磁波のポインティングベクトル$\mathbf{S}$を求めよ。

つぎに，(3)で表される電磁波が右図のように，$z\geq 0$の半無限空間にある誘電率ε，透磁率μの誘電体に垂直入射するとする。入射波の電場，磁束密度の振幅をそれぞれE_0，B_0，境界面($z=0$)で反射された反射波の電場，磁束密度の振幅をE_1，B_1，誘電体内部に浸透した透過波の電場，磁束密度の振幅をE_2，B_2とする。誘電体には真電荷や伝導電流はないものとする。このとき，以下の問いに答えよ。



(5) 電場，磁場，電束密度，磁束密度について，真空と誘電体の境界面での接続条件を，それぞれ説明せよ。また，その接続条件をもとに，E_0，B_0，E_1，B_1，E_2，B_2の満たす条件式を示せ。

(6) 反射波，透過波のE_1，E_2を，E_0を使って表せ。

(7) 反射波，透過波のポインティングベクトル$\mathbf{S}_1$，$\mathbf{S}_2$を求めよ。また，電磁波のエネルギー反射率R，エネルギー透過率Tを求め，$R+T=1$ であることを示せ。

[III] 熱・統計力学

質量mの同種の粒子N個からなる古典理想気体を考える。粒子は，壁面によって$0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L, z \geq 0$の範囲に運動が制限され，かつ，$z$方向に調和ポテンシャル $V(z) = \alpha z^2$ $(\alpha > 0, z \geq 0)$ をうけるものとする。この系が温度Tで熱平衡状態にある。プランク定数をh, ボルツマン定数をk_Bと表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) 分配関数Zを求めよ。積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ を用いてよい。

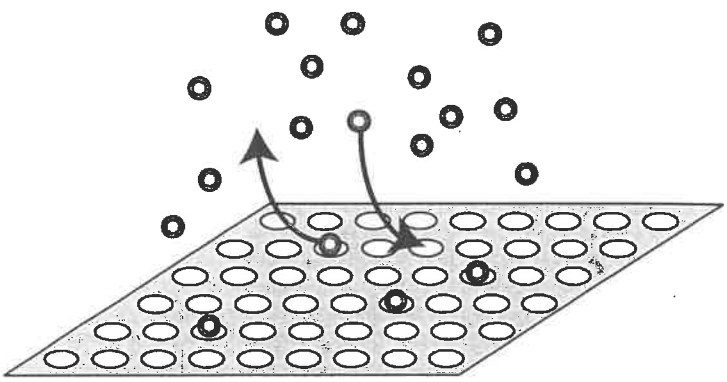
(2) Zを用いて，この系の内部エネルギーUと比熱Cを求めよ。

(3) 粒子数密度が，$\rho(z) = \frac{N}{L^2}\sqrt{\frac{4\alpha}{\pi k_B T}}\ \exp\left(-\frac{\alpha z^2}{k_B T}\right)$ $(z \geq 0)$ となることを示せ。

つぎに，この系のxy面 $(z = 0,\ 0 \leq x \leq L\ ,\ 0 \leq y \leq L)$ が理想気体の粒子の吸着面になっており，M個の吸着サイトが存在する場合を考察する。一つの吸着サイトには最大で一つの粒子を吸着することができ（下図を参照），このとき吸着された粒子のエネルギーは $-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ である。また，M個の吸着サイトにM'個の粒子が吸着するとき，被覆率θを，$\theta = M'/M$と定義するものとする。$N \gg M$であるとき，以下の問いに答えよ。

(4) はじめに，この吸着面が温度Tで任意の粒子浴と粒子のやりとりをする場合を考える。吸着面の化学ポテンシャルをμとおく。被覆率θを，μ, T, ε を用いて表せ。

(5) つぎに，吸着面と理想気体の間での粒子のやりとりが，温度Tで熱平衡に達している場合を考える。このとき，吸着面と理想気体の化学ポテンシャルは一致する。被覆率θを，N, L, m, α, T, ε を用いて表せ。



[IV] 量子力学

一次元の量子力学の問題を考える。長さがLの箱に質量Mの粒子が閉じ込められている。以下の問いに答えよ。

定常状態のシュレーディンガー方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\phi_n(x)=E_n\phi_n(x) \\ &V(x)=\begin{cases}+\infty & (x\le 0)\\ 0 & (0<x<L)\\ +\infty & (L\le x)\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad ①$$

である。ここで，E_nはエネルギー固有値，$\phi_n(x)$はエネルギーE_nを持つエネルギー固有状態の波動関数である。エネルギー準位を数える添字nは，$n=1,2,3,\cdots$ とし、基底状態に$n=1$を割り当て，$E_1<E_2<E_3<\cdots$ とする。

まず，定常状態のシュレーディンガー方程式①の解 $E_n,\phi_n(x)$について考える。

(1) 箱の内部での式①に対して，未知量 $E_n,\phi_n(x)$をそれぞれ$\lambda,f(x)$とおくと，

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2}f(x)=\lambda f(x) \quad ②$$

という微分方程式になる。$f(x)$ に対する一般解を求めよ。答のみ書けばよい。

(2) 定常状態のシュレーディンガー方程式①の解 $\phi_n(x)$ が満たすべき境界条件を示せ。答のみ書けばよい。

(3) 境界条件を満たす解 $E_n,\phi_n(x)$ を求めよ。

（次ページに続く）

つぎに，箱の中の粒子の運動を量子力学的に考える。時間に依存するシュレーディンガー方程式は次で与えられる。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(t,x) \qquad ③$$

時刻$t=0$で波動関数$\psi(t,x)$が

$$\psi(0,x)=g(x), \qquad g(x)=\sqrt{\frac{30}{L^5}}x(L-x) \qquad ④$$

であった。

(4) 時間に依存するシュレーディンガー方程式③の$\psi(t,x)$に対する解として，$\phi_n(x)$の線形結合で表される一般的な解がある。このような$\psi(t,x)$ の解を記号 $E_n,\phi_n(x)$ などを用いて表せ。答のみ書けばよい。

(5) 初期条件④を満たす解を求めよ。

(6) 時刻$t>0$ において第 $(2k-1)$励起状態（すなわち$n=2k,(k=1,2,3,\cdots)$の状態）を見いだす確率はゼロである。このことの物理的意味を対称性と保存則の観点から説明せよ。

必要なら以下の積分公式を使ってよい。

$$\int x\sin(ax)\,dx = -\frac{x}{a}\cos(ax)+\frac{1}{a^2}\sin(ax)+[\text{定数}], \qquad (a\neq 0) \qquad ⑤$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{x}{a}\sin(ax)+\frac{1}{a^2}\cos(ax)+[\text{定数}], \qquad (a\neq 0) \qquad ⑥$$

$$\int x^2\sin(ax)\,dx = \frac{2-a^2x^2}{a^3}\cos(ax)+\frac{2x}{a^2}\sin(ax)+[\text{定数}], \qquad (a\neq 0) \qquad ⑦$$